

**Д. Ю. МУРОМЦЕВ,  
И. В. ТЮРИН**

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САПР**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**Издание второе, переработанное и дополненное**



**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2014**

ББК 32я73

М91

**Муромцев Д. Ю., Тюрин И. В.**

**М91** Математическое обеспечение САПР: Учебное пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 464 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1573-1**

Представлены базовые понятия и определения в области систем автоматизированного проектирования, приведена информация по их классификации и видах обеспечения. Даны общие сведения о математическом аппарате САПР, рассмотрены вопросы математического моделирования электронных средств на различных уровнях конструктивной иерархии. Особое внимание в пособии уделяется задачам автоматизированного проектирования электронных средств, подробно рассмотрены методы и алгоритмы решения задач конструкторского проектирования.

Учебное пособие предназначено для бакалавров и магистрантов, обучающихся по направлениям «Конструирование и технология электронных средств», «Радиотехника» и «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» всех форм обучения, аспирантов и специалистов, занимающихся проектированием радиоэлектронной аппаратуры, а также студентам других технических направлений и специальностей.

ББК 32я73

#### Рецензенты:

*И. И. ПАСЕЧНИКОВ* — доктор технических наук, профессор кафедры «Информатика и информационные технологии» Тамбовского государственного университета им. Г. Р. Державина; *Н. К. ЮРКОВ* — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Конструирование и производство радиоаппаратуры» Пензенского государственного университета.

---

Зав. редакцией инженерно-технической  
литературы *Т. Ф. Гаврильева*  
Обложка *Е. А. Власова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**

lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 22.10.13.

Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 24,36. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии  
с предоставленным оригинал-макетом  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.  
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru

---

© Издательство «Лань», 2014  
© Коллектив авторов, 2014  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2014

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АНР — Analytic Hierarchy Process — метод анализа иерархий
- CAD — Computer-Aided Design — автоматизированное проектирование
- CALS — Continuous Acquisition and Lifecycle Support — непрерывное сопровождение и поддержка в течение жизненного цикла
- ECAD — Electronic Computer-Aided Design — автоматизированное проектирование в области электроники
- EDA — Electronic Design Automation (см. ECAD)
- HCM — Heuristic Combination Method — метод комбинирования эвристик
- IDEF — Integrated DEFinition — методология анализа процессов в промышленных системах
- MCAD — Mechanical CAD — автоматизированное проектирование в области машиностроения
- SCADA — Supervisory Control and Data Acquisition — диспетчерское управление и сбор данных
- АПЕ — аппаратно-процессная единица
- АСУП — автоматизированная система управления предприятием
- АСУТП — автоматизированная система управления технологическими процессами
- АЧХ — амплитудно-частотная характеристика
- БД — база данных
- ВОВ — выбор оптимального варианта

- ВПВ — выбор предпочтительного варианта  
ГДМ — граф достижимых маркировок  
ГМ — геометрическое моделирование  
ДИМ — дискретная имитационная модель  
ДН — диаграмма направленности  
ДПП — двусторонняя печатная плата  
ЕСКД — единая система конструкторской докумен-  
тации  
ЕСТД — единая система технологической докумен-  
тации  
ЕСТПП — единая система технологической подготовки  
производства  
ЖЦ — жизненный цикл  
ЗПС — задача параметрического синтеза  
ЗСС — задача структурного синтеза  
ИМС — интегральная микросхема  
ККП — ключевой компонент проекта  
КС — комбинационная схема  
ЛПР — лицо, принимающее решение  
ЛС — логическая схема  
ЛЭ — логический элемент  
МГ — машинная графика  
МКП — монтажно-коммутационное пространство  
МКР — метод конечных разностей  
МКЭ — метод конечных элементов  
ММ — математическая модель  
МО — математическое обеспечение  
МОП — металл — оксид — полупроводник  
МПП — многослойная печатная плата  
ОПП — односторонняя печатная плата  
ОУ — операционный усилитель  
ПМК — программно-методический комплекс  
ПО — программное обеспечение  
ПС — программное средство  
РГ — рабочая группа  
САПР — система автоматизированного проектирова-  
ния  
СВ — случайная величина  
СВЧ — сверхвысокая частота

- СМО — система массового обслуживания
- СТЗ — система технического зрения
- СУБД — система управления базой данных
- ТП — технологический процесс
- ТС — тестовая схема
- ФАР — фазированная антенная решетка
- ЭК — экспертная комиссия
- ЭП — элемент памяти
- ЭРИ — электрорадиоизделие
- ЭС — электронное средство

## ВВЕДЕНИЕ

**П**роцессы проектирования и технологии производства современных электронных средств (ЭС) не могут осуществляться без использования систем автоматизированного проектирования (САПР), позволяющих проводить инженерные расчеты, моделировать физические процессы, протекающие в ЭС, выполнять разработку и оформление конструкторско-технологической документации. Особая роль в САПР отведена математическому аппарату, методы и алгоритмы которого непосредственно реализованы в программных средствах и во многом определяют возможности и характеристики САПР. Математический аппарат САПР отличается обширностью используемых методов из различных сфер математического знания, и, пожалуй, нет такой области математики, которая не нашла бы применения в САПР.

Поскольку практически любое современное электронное устройство представляет собой сложную систему, состоящую из множества элементов, находящихся во взаимосвязи между собой и подверженных влиянию вредных воздействующих факторов окружающего пространства, то требования к стабильности технических характеристик ЭС, его надежности и качеству очень высоки. Кроме того, наблюдается непрерывная тенденция усложнения электронной аппаратуры, ее миниатюризации, снижения энергопотребления, постоянно появляются сообщения о появлении принципиально новых ЭС, при создании которых использованы передовые научные достижения,

уникальные материалы и технологии. Поэтому проектирование современной электронной техники основано на применении сложных математических методов моделирования, анализа и синтеза, значительную часть из которых невозможно выполнить вручную без использования специализированных САПР.

Именно поэтому знание основ автоматизации проектирования и умение работать со средствами САПР требуется любому специалисту-разработчику ЭС. Предприятия, ведущие разработки без САПР или лишь с малой степенью их использования, оказываются неконкурентоспособными как из-за больших материальных и временных затрат на проектирование, так и из-за невысокого качества проектов. В результате автоматизация проектирования стала необходимой составной частью подготовки студентов разных технических направлений и специальностей, так как инженер, не умеющий работать со средствами САПР, в настоящее время не может считаться полноценным специалистом.

Учебное пособие состоит из пяти глав. В первой главе изложены основные понятия и определения в области систем автоматизированного проектирования, рассмотрена их классификация и основные виды обеспечения.

Во второй главе даны общие сведения о математическом аппарате САПР, рассмотрены ключевые положения теории множеств, теории графов и алгебры логики.

Третья глава посвящена вопросам математического моделирования на различных уровнях иерархии конструктивных модулей. Изложены принципы моделирования на микро-, макро- и системном уровнях. Рассмотрены особенности построения графовых моделей, уделено внимание задачам моделирования электрических сигналов, моделям аналоговых, цифровых и электродинамических устройств, задачам оптимизации проектных решений, а также моделям систем массового обслуживания и моделям надежности ЭС.

В четвертой главе приведены задачи, которые требуется решать с использованием средств автоматизации на различных иерархических уровнях проектирования ЭС:

системотехническом, схемотехническом, технологическом и конструкторском. Рассмотрены особенности принятия решений в условиях частичной и полной неопределенности, методы управления проектами, способы решения задач структурного и параметрического синтеза, анализа сигналов и методы оценки качества технологических процессов.

Задачи проектирования печатных плат являются одними из наиболее важных в комплексе работ по конструированию ЭС, результат их решения оказывает прямое влияние на технические характеристики и показатели качества изделия. Поэтому пятая глава учебного пособия посвящена методам и алгоритмам решения задач конструкторского проектирования функционального узла на печатном монтаже автоматизированным способом. Рассмотрены различные алгоритмы решения комплекса задач компоновки конструктивных элементов, их размещения в монтажно-коммутационном пространстве и трассировки электрических соединений.

Учебное пособие соответствует требованиям, предъявляемым Федеральным государственным образовательным стандартом 3-го поколения, и предназначено для подготовки бакалавров и магистрантов всех форм обучения по направлениям 211000 «Конструирование и технология электронных средств», 210400 «Радиотехника» и 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» при изучении дисциплин «Системы автоматизированного проектирования в радиоэлектронике», «Информационные технологии конструирования электронных средств», «Основы компьютерного проектирования радиоэлектронных средств», «Моделирование конструкций и технологических процессов производства электронных средств», «Проектирование сложных систем», «Моделирование в радиоэлектронных средствах», «Методы оптимизации» и др. Материалы пособия рекомендуется использовать при выполнении лабораторных и контрольных работ, разделов курсовых проектов, выпускных квалификационных работ бакалавров и магистерских диссертаций указанных направлений. Пособие может быть полезно аспирантам



и специалистам, занимающимся проектированием радиоэлектронной аппаратуры, а также студентам других технических специальностей.

Авторы будут благодарны всем, кто пришлет свои замечания и предложения по содержанию и сути изложения материала настоящего учебного пособия по адресу электронной почты **konstr\_ES@mail.ru**.

# ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОМАТИЗИРОВАННОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

**С**оздание современных электронных средств невозможно без применения систем автоматизированного проектирования, которые обеспечивают гармоничное сочетание инструментов автоматизации проектно-конструкторских работ с интеллектуальным потенциалом и опытом специалистов-разработчиков.

## 1.1. ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Под проектированием понимают процессы создания, преобразования и формализованного представления образа еще не существующего технического объекта. Образ объекта в целом или его составных частей создается в воображении человека или формируется в соответствии с некоторыми алгоритмами в ходе взаимодействия человека и компьютера [1]. Следовательно, проектирование представляет собой процесс, в котором научно-техническая информация используется для создания нового продукта, приносящего обществу определенную пользу. В настоящее время принято выделять функциональный, оптимальный и системный подходы к проектированию.

Основной целью при функциональном подходе к проектированию является создание эффективно работающего и выполняющего требуемую функцию объекта. Основное внимание обращается прежде всего на показатели качества и надежности. Функциональное проектирование часто заложено в основу массового производства

разнообразных изделий. Основным недостатком такого подхода является сложность правильного выбора целевой функции и расстановки приоритетов. Например, можно спроектировать изделие, надежно и качественно выполняющее свою основную функцию, но обладающее непривлекательным для потребителей дизайном и неудобное в эксплуатации. Такой подход к проектированию присущ в случае отсутствия на рынке товаров конкурентов.

Подход к проектированию, целью которого является не только поиск функционально эффективных решений, но и удовлетворение разных, порой противоречивых критериев, получил название оптимального. Активно оптимальное проектирование стало применяться со второй половины прошлого столетия благодаря достижениям теории принятия решений и теории исследования операций, а также развитию вычислительной техники, позволившей оперативно просчитывать многочисленные варианты и решать сложные математические задачи. При оптимальном проектировании на этапе технического задания составляется полный перечень требований к разрабатываемому объекту. Из этих требований формируются частные показатели качества, наиболее важные из которых сводятся в комплексный критерий оптимизации.

В последние годы не только существенно возросла сложность проектируемых объектов, но и их воздействие на общество и окружающую среду, в том числе тяжелые последствия аварий и катастроф, высокие требования к цене и качеству, сокращению сроков выпуска новой продукции. Необходимость учета этих обстоятельств внесла изменения в традиционный характер и методологию проектной деятельности. Сформировалась новая проектная идеология, получившая название системного подхода к проектированию. Основным принципом системного подхода к проектированию является рассмотрение разрабатываемого объекта как системы, состоящей из множества элементов, обладающих определенной структурой, свойствами и разнообразными внутренними и внешними связями. Системное проектирование комплексно решает поставленные задачи, принимает во внимание взаимо-

действие и взаимосвязь отдельных объектов и их частей как между собой, так и с внешней средой, учитывает социально-экономические и экологические последствия их функционирования. Системное проектирование основывается на тщательном совместном рассмотрении объекта и процесса проектирования.

При том или ином подходе проектирование ЭС в большинстве случаев заключается в разработке в течение определенного времени и с минимальными производственными затратами новых конкурентоспособных электронных средств, которые с требуемой эффективностью способны выполнить предписанные им функции в заданных условиях. В процессе проектирования выполняется комплекс исследовательских и расчетно-конструкторских работ, результатом которых является документация на разрабатываемое изделие, необходимая для его производства. Проектирование, при котором все результаты проектных работ получают с использованием средств вычислительной техники без непосредственного участия человека, получило название автоматического. В настоящее время оно редко используется из-за сложности преобразования описаний объектов и применяется в основном для проектирования типовых конструкций. Выполнение всех этапов проектных работ без использования ЭВМ, т. е. ручное проектирование, считается устаревшим и почти не применяется в связи с высокой трудоемкостью и низкой производительностью. Наиболее распространенным способом является автоматизированное проектирование, при котором выработка проектных решений осуществляется в результате взаимодействия человека и ЭВМ.

## **1.2. ЦЕЛИ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭС**

По степени новизны создаваемых объектов ЭС выделяют следующие цели проектирования [2]:

1. Частичная модернизация существующего изделия, обеспечивающая незначительное улучшение или расширение функциональных характеристик и других по-

казателей качества. Например, повышение надежности, точности работы, дальности действия, уменьшение габаритов, энергопотребления и т. д. В зависимости от вида показателя качества под незначительным улучшением понимается изменение характеристик от нескольких процентов (точность работы) до нескольких десятков процентов.

2. Значительная модернизация прототипа (путем серьезных изменений конструкции и принципа действия), в результате которой происходит улучшение показателей качества ЭС в несколько раз.

3. Разработка принципиально новых ЭС, использующих иные принципы действия, решающих другие задачи и изготавливаемых по новым технологиям. При сопоставлении с прототипами и аналогами отдельные показатели качества новых ЭС могут увеличиваться на несколько порядков.

Основными путями достижения новизны проектируемых ЭС являются:

- использование новых физических явлений и принципов действия;
- применение новых материалов, в том числе наноматериалов, более совершенной элементной базы и структуры;
- привлечение современных информационных технологий, методов искусственного интеллекта, повышения отказоустойчивости и т. п.;
- улучшение производственных процессов на основе использования прогрессивных и энергосберегающих технологий, автоматизации процессов, внедрения методов контроля качества и др.

В общем случае проектирование следует рассматривать как один из этапов жизненного цикла ЭС. Укрупненно это можно представить в виде замкнутого «цикла обновления», показанного на рисунке 1.1 [3].

Данный цикл содержит пять последовательно повторяющихся этапов:

1) формирование идеи модернизации (или создания нового изделия) выполняется на основании накопленного



**Рис. 1.1**  
Цикл обновления

опыта эксплуатации и проектирования объекта, требований заказчика, характеристик продукции конкурентов, последних достижений в науке и технике;

2) анализ объектов и предметной области предусматривает нахождение общих идей и концепций, которые могут быть использованы для достижения поставленных целей;

3) проектирование, т. е. непосредственное выполнение всех этапов проектных работ (путем решения задач анализа и синтеза);

4) производство на основе разработанной технологии;

5) эксплуатация в различных условиях, сопровождающаяся сбором сведений о том, насколько достигнуты сформулированные цели, какие имеются пожелания пользователей для дальнейшего совершенствования изделий.

Наиболее часто в качестве основной цели процесса проектирования рассматривается создание малогабаритных, надежных и высокоэффективных ЭС, которые при производстве и эксплуатации требуют минимального расхода энергетических, трудовых и материальных ресурсов. Эта цель достигается решением широкого комплекса задач, наиболее важными из них являются комплексная миниатюризация, энергетическая эффективность и высокая технологичность.

При проектировании обычно выделяют два широких класса задач — анализа и синтеза.

Задачи анализа связаны с определением свойств проектируемого объекта, например с расчетом динамических характеристик (частотных, временных) электрических схем. По результатам анализа оценивается степень соответствия проектных решений задаваемым требованиям.

Задачи синтеза заключаются в разработке проектных решений по заданным требованиям, свойствам и ограничениям к функционированию системы (блока, узла). Например, разработка электрической схемы узла по заданным характеристикам. Различают задачи синтеза структурного и параметрического. При структурном синтезе создается структура схемы, т. е. определяется состав элементов и способы их соединения. В случае параметрического синтеза находятся числовые значения параметров элементов, от которых зависят общие характеристики схемы. Обычно задачи синтеза решаются как оптимизационные.

При проектировании ЭС задачи анализа и синтеза взаимосвязаны, каждое синтезируемое проектное решение сопровождается этапом анализа его характеристик. Сложность задач анализа и синтеза, обусловленная в том числе необходимостью учета множества факторов, оказывающих совместное влияние друг на друга, требует для решения таких задач использования специальных компьютерных программных продуктов и привлечения квалифицированных специалистов.

### **1.3. ПРИНЦИПЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭС**

Любое электронное средство обычно представляет собой сложную техническую открытую систему, в основе функционирования которой лежат процессы передачи, получения и обработки информации, связанные с преобразованием и передачей электромагнитной энергии. Современные ЭС включают большое число составных частей с различными связями между ними и обладают следующими свойствами, характерными для сложных систем [3], [4]:

- ярко выраженное целевое назначение;
- наличие множества разнообразных объектов, взаимодействующих с ЭС;
- значительные масштабы зоны действия;
- базирование в различных средах (земная поверхность, акватория океана, атмосфера и космическое пространство);
- сложность процессов обработки информации, поступающей от различных объектов, использование средств автоматизации и вычислительной техники.

Наряду с этими достаточно общими свойствами ЭС обладают рядом особенностей, которые выделяют их в отдельный класс проектируемых технических объектов. К таким особенностям относят следующие.

1. Целевое назначение ЭС предполагает обеспечение информационного взаимодействия между удаленными объектами с использованием радиосигналов. Поэтому составными частями значительного числа ЭС являются подсистемы генерирования и приема электромагнитных колебаний.

2. Информационное взаимодействие между пространственно-разнесенными радиотехническими средствами осуществляется на основе модуляции параметров радиосигнала (амплитуды, частоты, фазы) полезными сообщениями. Следовательно, важную роль в ЭС играют системы модуляции и демодуляции сигналов.

3. Информационный обмен между радиотехническими системами и объектами с использованием электромагнитных колебаний требует больших энергетических затрат на генерацию и излучение радиосигналов, а также обеспечения концентрации излучаемой мощности в направлении на целевой объект или группу объектов. При распространении электромагнитных волн в среде происходит сильное ослабление передаваемых сигналов. Поэтому в приемном тракте требуется значительное усиление принимаемых сигналов без внесения дополнительных искажений.

4. В любых ЭС приходится решать проблемы, связанные с воздействием естественных и искусственных помех,



которые приводят к искажению, а иногда и полному подавлению полезного сигнала. Для повышения помехозащищенности используются различные методы, реализуемые специальными устройствами, которые значительно усложняют структуру ЭС.

При проектировании ЭС используют функциональное, конструкторское, технологическое и информационное описание.

Функциональное описание характеризует эксплуатационные функции системы, обеспечивающие выполнение целевых заданий. Оно раскрывает принцип действия, свойства, протекающие в ЭС физические и информационные процессы. На основе функционального описания производится декомпозиция системы на составные части, выполняющие различные функции. При разукрупнении системы используется иерархический принцип: сначала указываются обобщенные функции, затем в них выделяются обеспечивающие. В результате такой декомпозиции происходит структурирование системы по уровням иерархии в виде совокупности подсистем, состоящих из устройств, которые, в свою очередь, состоят из функциональных узлов.

Функциональный узел обычно представляет собой законченную сборочную единицу, не имеющую самостоятельного применения (например, дискриминатор, усилитель, аттенюатор и т. п.) и в большинстве случаев выполненную на базе несущей конструкции. В функциональном узле также можно выделить отдельные компоненты — печатные платы, микросхемы, резисторы и т. д.

Функциональное описание компонента ЭС содержит сведения:

- об основных эксплуатационных функциях, выражаемых выходными характеристиками;
- о зависимости выходных характеристик от влияющих на них параметров системы и дестабилизирующих воздействий окружающей среды;
- о показателях качества работы компонента и их соответствия поставленным целям проектирования;
- о разнообразных ограничениях на функционирование.

Математически функциональное описание компонента можно представить соотношением

$$y(t, s) = f(x, u, v),$$

где  $y$  — выходная характеристика;  $x$  — вектор режимных параметров и воздействий других компонентов;  $u$  — вектор проектных и управляющих параметров компонента;  $v$  — воздействия окружающей среды;  $t, s$  — временная и пространственная координата соответственно [3], [5].

Конструкторское описание дает представление о материальной реализации ЭС, оно отображает взаимное расположение частей проектируемого объекта, их формы, используемые материалы и т. п.

Технологическое описание отображает методы и инструментальные средства процесса изготовления ЭС.

Особую роль при автоматизированном проектировании играет информационное описание, содержащее все виды информации (документы, сведения, сообщения, сигналы) и отношения между ними.

Все описания разделяются на иерархические уровни, которые отличаются степенью детализации отображаемых целей, свойств, функций и структур проектируемых объектов. Наряду с рассмотренными описаниями при проектировании ЭС используется и ряд других, в частности [3], [6]:

- первичное, или исходное, описание ЭС, представляющее собой техническое задание на проектирование, т. е. цели и задачи, решаемые системой, тактико-технические требования, условия эксплуатации и т. п.;
- промежуточные описания ЭС и его составных частей, основное место в которых занимают математические модели и натурные макеты;
- окончательное описание разработанного объекта в виде полного комплекта технической документации (текстовый материал, схемы, чертежи и т. п.), представляемого на машинных носителях информации.

В ряде случаев используется термин «морфологическое описание», которое характеризует устройство объек-

та, его структуру, геометрию и прочие сведения и формально представляется кортежем  $\langle S, R, C \rangle$ , в котором  $S, R, C$  — множества элементов, связей между ними и структур системы соответственно, расположенных по иерархическим ступеням [3].

В целом объекты автоматизированного проектирования следует рассматривать в рамках последовательности (потока) проектов. Последовательность  $\Pi_j$  модернизаций ЭС  $j$ -го типа (модель  $M_j$  изделия) можно записать в виде

$$\Pi_j = (\text{Пр}M_j(t_0 + \Delta t_0), \text{Пр}M_j(t_1 + \Delta t_1), \dots, \text{Пр}M_j(t_i + \Delta t_i), \dots), t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots,$$

где  $\text{Пр}M_j$  — проектные работы по модернизации (усовершенствованию) ЭС  $j$ -го типа;  $t_i$  — момент времени запуска проекта  $\text{Пр}M_{ji}$ ;  $\Delta t_i, i=0, 1, 2, \dots$  — продолжительность  $i$ -го проекта.

Основу базовой модели  $M_j$  ЭС  $j$ -го типа составляют описания принципа действия (ПД), конструкции (К), тактико-технических характеристик (ТТХ) и информационных возможностей (ИВ), т. е.

$$M_j = (\text{ПД}_j, \text{К}_j, \text{ТТХ}_j, \text{ИВ}_j).$$

Описание ЭС как объекта разработки непосредственно связано с целями и процессами проектирования, оно развивается по мере выполнения проектных работ, при этом последовательно обеспечивается соответствие всех целевых установок техническому заданию. Таким образом, имеет место триада в виде единства цели, объекта и процесса проектирования, рассматриваемых в их развитии от возникновения проблемы (инициации) до окончания работ над проектом.

Именно поэтому автоматизированное проектирование ЭС базируется на ряде общесистемных принципов, а также положений, учитывающих отношение ЭС к особому классу разрабатываемых объектов. Общесистемные принципы определяют ЭС как сложные системы, предназначенные для выполнения определенных целей и исследуемые с помощью математических моделей. Эти принципы

включают ряд постулатов (утверждений, принимаемых без доказательства). К основным общесистемным принципам относятся следующие [2], [3], [7].

*Принцип физичности*, в соответствии с которым всем ЭС присущи законы радиотехники, электроники и др., определяющие внутренние причинно-следственные связи существования и функционирования компонентов и системы в целом. Наиболее важными постулатами данного принципа являются постулаты целостности, декомпозиции и автономности.

Так, в соответствии с постулатом целостности ЭС рассматривается как единое целое, т. е. не как множество подсистем, а как целостный объект, допускающий различные деления на подсистемы. Поэтому ЭС не тождественно никаким его элементам (подсистемам). Таким образом, ни при композиции (объединении подсистем в систему), ни при декомпозиции (разделении системы) недопустимы потери понятий. При этом композиция и декомпозиция должны осуществляться с целью генерирования более качественной (новой) информации, характеризующей систему. Для выявления целостности требуется учет всех взаимосвязей внутри системы и связей системы с внешней средой. Кроме того, выявляются основные системные свойства и факторы, которые могут снижать их уровень.

Применение постулата целостности при проектировании ЭС заключается в раскрытии сведений о системных свойствах для всех этапов жизненного цикла и в обобщении их в понятия, которые используются при разработке и исследовании подсистем после декомпозиции. Считается, что декомпозиция выполнена удачно, если понятия, относящиеся к системе и подсистемам, хорошо согласуются, между ними имеется преемственность. ЭС, рассматриваемое как система, обладает особыми системными свойствами, которых нет у подсистем (элементов) при любом способе декомпозиции.

Постулат декомпозиции применяется для снижения уровня сложности исследуемого ЭС при решении задач анализа и синтеза путем выделения из системы подсистем.

Подсистемы располагаются по иерархическим уровням, причем подсистема на данном уровне является системой для элементов нижележащего уровня и рассматривается как элемент для компонента вышележащего уровня. Характеристики разрабатываемого ЭС определяются в ходе поэтапной процедуры выработки проектных решений, начиная с системы более высокого уровня и заканчивая детальными свойствами ее элементов.

Постулат автономности предполагает, что из множества альтернативных вариантов декомпозиции ЭС при анализе системных свойств большинство декомпозиций окажутся неудачными и для детальной разработки будет использован один или незначительное число вариантов.

*Принцип моделируемости*, в соответствии с которым ЭС представимо конечным множеством моделей, каждая из которых отражает определенную грань ее сущности. Выявление новых свойств и сущностей рассматриваемой системы необязательно должно сопровождаться построением обобщающих моделей, а может ограничиваться наращиванием числа упрощенных моделей, взаимодействие которых обеспечивает отражение сложной системы в целом. Принцип моделируемости включает ряд постулатов: неопределенности, дополненности, многообразия моделей, действий, согласования уровней, внешнего дополнения, достаточности, проверенного методического обеспечения и др.

Большую роль при проектировании ЭС играет учет постулата неопределенности. Согласно этому постулату существует область неопределенности, в пределах которой свойства системы могут быть описаны только вероятностными характеристиками, например при исследовании аспектов помехоустойчивости радиосистем. Повышение точности определения какого-либо количественно описываемого свойства сложной системы сверх некоторого предела сопровождается понижением возможной точности определения другого свойства. Максимальная точность определения свойств системы зависит от присущей ей области неопределенности, внутри которой повышение точности определения одного свойства влечет за собой снижение точности определения других свойств.

В соответствии с постулатом дополнительности ЭС, находясь в различных ситуациях, могут проявлять различные системные свойства, в том числе и альтернативные, т. е. несовместимые ни в одной из ситуаций по отдельности. Поэтому проектирование ЭС должно выполняться с учетом возможных состояний функционирования, которые могут иметь место в процессе реальной эксплуатации.

Постулат многообразия моделей означает, что определение характеристик проектируемого ЭС производится с помощью множества моделей, которые в общем случае различаются используемыми математическими зависимостями и физическими закономерностями. Выбор моделей зависит от этапов проектирования и особенностей объекта.

Согласно постулату действий для изменения поведения ЭС требуется прирост управляющего или возмущающего воздействия, превосходящего некоторый пороговый уровень. Воздействия обычно имеют энергетический, информационный или вещественный характер; они могут накапливаться, а затем проявляться скачкообразно. Соответственно пороговые значения для воздействий могут быть функциями количеств энергии определенного вещества и определенной информации. Реакция системы на внешнее воздействие носит пороговый характер.

В соответствии с постулатом согласования уровней требования к ЭС, формируемые на любом уровне, выступают как условия и ограничения выбора частных моделей и предельных возможностей системы на нижележащих уровнях. В случае невозможности выполнения каких-либо требований осуществляется корректировка соответствующих условий.

Согласно постулату внешнего дополнения проверка истинности результатов, получаемых на каждом уровне, должна производиться с использованием исходных данных, моделей и методов вышележащих уровней. Соблюдение данного постулата при разработке ЭС является необходимым условием выполнения проекта, соответствующего сформулированным целям и техническому заданию.

Постулат достаточности реализуется при определении требуемых характеристик в процессе совершенствования ЭС с учетом возрастания затрат на улучшение системы и проверкой достаточности принимаемых решений по заданным критериям эффективности. Для этого используются критерии пригодности соответствующих моделей, с помощью которых принимаются конструктивные решения на каждом этапе оценки характеристик системы.

Постулат проверенного методического обеспечения означает, что для анализа и синтеза ЭС необходимо использовать отработанные и экспериментально проверенные модели и методики, обеспечивающие отдельные характеристики системы в заданные сроки и с требуемой точностью.

*Принцип целенаправленности* означает, что всякой системе присуща функциональная тенденция, направленная на достижение некоторого результата, при этом система способна противостоять внешним воздействиям, использовать среду и случайные события. Принцип целенаправленности включает постулат выбора, в соответствии с которым система обладает способностью к выбору поведения. Поэтому однозначно предсказать и экстраполировать ее поведение заранее невозможно ни при каком априорном знании свойств системы состояний внешнего окружения.

Согласно этому постулату ЭС функционирует в существенной, но не детерминированной связи с ситуациями внешнего окружения. Поведением ЭС можно целенаправленно управлять, тем более что большинство радиосистем включают в себя человека-оператора, т. е. являются эргатическими. Для ЭС использование постулата выбора имеет два аспекта.

Первый аспект связан со стимулированием или подавлением «свободы» выбора. С одной стороны, в сложных ситуациях возможность выбора должна быть максимальной, что расширяет диапазон деятельности. С другой стороны, в штатных ситуациях управляющие устройства ЭС должны иметь возможность выбора в пределах поставленных задач либо не иметь ее вовсе. Второй аспект касается

формального представления задачи выбора и количественных оценок, необходимых для решения задачи.

Современные ЭС имеют возможность выбора и обладают адаптивными свойствами, т. е. реагируют на внешние воздействия в зависимости от внутренних критериев целенаправленности. При этом априорные знания не позволяют заранее однозначно предсказать этот выбор.

Таким образом, постулат выбора позволяет ЭС в соответствии с его целенаправленностью использовать даже редкие благоприятные случаи, возникающие в окружающей среде, и блокировать неблагоприятные события.

Наряду с рассмотренными основными принципами системного подхода при автоматизированном проектировании ЭС широкое применение находит ряд важных положений, которые также часто называют принципами. Эти положения во многих случаях вытекают из общесистемных принципов и отражают специфику ЭС как объектов проектирования с использованием информационных технологий. Рассмотрим кратко основные положения (принципы) автоматизированного проектирования ЭС.

1. При проектировании необходимо учитывать все последующие этапы жизненного цикла разрабатываемого ЭС, и прежде всего производство, эксплуатацию и утилизацию. Многие проекты остаются нереализованными вследствие недостаточной технологичности, больших производственных затрат, сложного обслуживания.

2. Необходимо прогнозировать и учитывать перспективы развития как принципов действия, так и технологии изготовления ЭС. В условиях жесткой конкуренции непринятие во внимание данного положения приводит к тому, что разработанное устройство становится морально устаревшим уже при его производстве или на начальном этапе эксплуатации. Принцип развития требует, чтобы в ЭС предусматривалось наращивание и совершенствование аппаратных компонентов программных модулей, а также связей между ними. При модернизации ЭС допускается частичная замена отдельных компонентов.

3. Необходимо всестороннее рассмотрение всех видов взаимодействия проектируемого ЭС с внешней средой



и другими системами, в том числе связанного с электромагнитными излучениями, обменом информацией и энергией, воздействием на систему окружающей температуры, влажности, ионизирующего излучения и других внешних факторов.

4. Требуется учет различных видов взаимодействия между частями системы, и прежде всего функционального, конструктивного, энергетического и информационного. Важную роль играет также рассмотрение взаимодействия между элементной базой и схмотехникой, т. е. насколько используются возможности современной элементной базы в схмотехнических решениях для улучшения показателей качества ЭС.

5. Важно учитывать возможность изменения исходных данных и постановок задач, решаемых на этапах проектирования, производства и эксплуатации ЭС. Для этого целесообразно варьировать исходные данные в процессе проектирования для повышения надежности получаемых результатов, а также обеспечить достаточную универсальность спроектированной системы в случае модернизации части блоков или добавления новых для расширения или изменения функциональных возможностей системы. Данное положение тесно связано с аспектами робастного проектирования, при котором используются методы планирования экспериментов для ослабления влияния различных факторов на качество системы при ее производстве и эксплуатации [8].

6. Для повышения качества проектных работ, снижения риска целесообразно сочетать различные методы решения проектных задач — математические, эвристические, экспериментальные, при этом необходимо обеспечить взаимодействие участников проекта разных специальностей — схмотехников, математиков, механиков, технологов, программистов и др.

7. При проектировании ЭС необходимо сочетать принципы иерархичности, декомпозиции и композиции. Начинается проектирование с рассмотрения ЭС как единого целого, анализа его общих характеристик и выходных показателей. Далее ЭС как система в соответствии с ме-

тодом декомпозиции разбивается на небольшое число подсистем, например предварительный усилитель, оконечный каскад, приемное устройство и т. д. Выделенные подсистемы исследуются независимо друг от друга. Затем определяются вклады каждой части в результирующие показатели всей системы, для этого производится объединение подсистем, т. е. их композиция в единое целое. В свою очередь подсистемы разбиваются на более мелкие части, которые также сначала рассматриваются независимо друг от друга, а потом проводится композиция и т. д. Такое иерархическое разбиение системы, анализ и синтез на каждом уровне иерархии позволяют эффективно решать задачи автоматизированного проектирования ЭС любой сложности.

По аналогии с иерархичностью, декомпозицией и композицией технических средств эти принципы используются для решения сложных математических задач, связанных с оптимизацией характеристик проектируемой системы при наличии разного рода ограничений.

Сочетание иерархичности, декомпозиции и композиции позволяет не только успешно решать задачи разработки радиосистемы, но и ее производство, а также эксплуатацию. Однако при декомпозиции ЭС на части требуется так формулировать исходные данные проектируемых частей (блоков, модулей и т. д.), чтобы они с достаточной полнотой учитывали все виды взаимодействия между частями в процессе выполнения ЭС поставленных перед ним задач. В противном случае даже оптимально спроектированная по частному критерию подсистема может не обеспечивать оптимальность системы в целом по обобщенному критерию.

8. Необходимо выделять основные показатели качества и конкурентоспособности проектируемого ЭС, которые следует улучшать в первую очередь. Такими показателями могут быть помехоустойчивость, точность, быстродействие и др. Особенно важно выделять главные показатели на разных стадиях проектирования, где большая размерность векторного критерия качества может привести к потере оптимального варианта решения и зна-

чительному увеличению сроков выполнения проекта. Выделение главных показателей облегчает вскрытие технических противоречий, затрудняющих улучшение качества системы в целом.

9. Проектирование следует рассматривать как выполнение широкого комплекса работ. Комплексность проектирования предполагает: анализ и всестороннюю оценку исходных предпосылок; исследование взаимодействия частей на различных уровнях иерархии; полный учет всех факторов и ограничений, влияющих на качество функционирования ЭС на всех этапах его жизненного цикла; использование векторных критериев эффективности.

10. Проектирование ЭС представляет собой итерационный процесс, в соответствии с которым на первых этапах применяются приближенные методы анализа с использованием небольшого числа основных критериев. Затем переходят к более детальному рассмотрению системы с учетом второстепенных факторов. Далее следует возврат к первым этапам для анализа основных характеристик с включением ранее неучтенных факторов и т. д. Такой циклически повторяющийся характер перехода к рассмотрению второстепенных факторов и их уточнению может выполняться несколько раз. Данное обстоятельство связано, во-первых, с недостаточным объемом исходной информации и низкой ее достоверностью, во-вторых, с новизной разработки. Чем больше изменений закладывается в проектируемую систему по сравнению с прототипом, тем больше приходится проводить итераций. Таким образом, итерационный процесс заключается в циклическом переходе от общего (системы в целом) к частному (составным частям) и обратно с уточнением и детализацией характеристик на каждом цикле итерации. Итерационный процесс непосредственно связан с принципом комплексности, эта связь обусловлена необходимостью выполнения комплексных исследований на каждой итерации.

11. При разработке ЭС необходимо предусматривать, чтобы созданная система удовлетворяла свойству открытости, т. е. при длительной эксплуатации имелась возможность ее совершенствования и модернизации.

Необходимость данного свойства обусловлена высокими темпами научно-технического прогресса, когда быстро меняются требования к системе, свойства окружающей среды, модифицируются цели, возникает необходимость объединения систем в комплексы.

12. Информационные технологии, используемые в ЭС, должны обеспечивать выполнение требования информационного единства, определяющего их информационную согласованность. В соответствии с этими требованиями создается единое информационное пространство в рамках одного радиоэлектронного комплекса.

Важную роль при формировании технического задания играет принцип включения, который состоит в том, что требования к создаваемой и развиваемой электронной системе определяются со стороны более сложной системы или комплекса.

Модульный принцип проектирования (принцип модульности) предполагает использование функциональных модулей сравнительно малой сложности и составление из них модулей более высоких уровней конструктивной иерархии ЭС. При этом должно выполняться требование совместимости электронных модулей, т. е. обеспечиваться типизация и унификация межмодульных связей для организации непосредственного информационного и энергетического взаимодействия между модулями [9].

Знание основных принципов разработки ЭС необходимо для оценки их соответствия современному научно-техническому уровню при выполнении проектов. Следует заметить, что не последнюю роль в этом играет фактор ориентированности на конечного пользователя, или, другими словами, насколько разрабатываемые ЭС учитывают уровень подготовленности персонала.

При разработке ЭС различных классов на передний план по важности могут выходить разные принципы. Например, для систем радиосвязи основное внимание может уделяться помехозащищенности, а для систем наведения — точности.

Автоматизированное проектирование следует рассматривать как информационный процесс, в ходе которого осуществ-

вляется преобразование входной информации о проектируемом объекте (техническое задание), знаний и опыта разработчиков (базы знаний), данных о прототипах (базы данных) в выходную конструкторско-технологическую информацию. При этом следует учитывать меняющееся в последние годы представление об информации, которая рассматривается не просто как совокупность данных, а как средство для решения проектировщиком стоящих перед ним задач.

Процесс проектирования реализуется в интерактивном режиме в виде диалога между человеком с программно-аппаратными средствами САПР в реальном масштабе времени. Этот процесс основан на интеллектуальной деятельности разработчиков, поддерживаемой средствами САПР.

Наряду с перечисленными положениями (принципами) широкое применение при проектировании находят разного рода методы, способы и приемы. К ним можно отнести следующие: параллельное проектирование, т. е. одновременную разработку составных частей системы на определенном уровне иерархии, что значительно сокращает сроки выполнения проекта; оптимизацию; имитационное моделирование (вычислительные эксперименты); методы шаблонов, наследования и т. д. Следует отметить, что между особенностями современных ЭС и рассмотренными системными принципами проектирования имеются тесные связи. Например, воздействие на ЭС большого числа случайных факторов отражается принципами открытости и целенаправленности. Сложность ЭС и множество выполняемых им функций при наличии общей цели функционирования находят отражение в принципах комплексности, иерархичности, декомпозиции и целенаправленности.

#### **1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ САПР**

Система автоматизированного проектирования представляет собой совокупность средств и методов, обеспечивающих выработку проектных решений на основе автоматизации информационных процессов. САПР реализуют информационную технологию в виде определенной

последовательности информационно связанных функций, задач или процедур, выполняемых в интерактивном режиме. Обычно САПР внедряется и функционирует на предприятии в виде самостоятельной системы, которая в последующем, как правило, интегрируется с другими автоматизированными системами: АСУП, АСУТП и др.

Основными частями САПР является комплекс средств автоматизации, организационно-методические, технические документы, а также специалисты, использующие эти средства в процессе своей профессиональной деятельности. Комплекс средств автоматизации, в свою очередь, включает взаимосогласованные программно-технические и программно-методические комплексы, содержащие программные, технические и информационные компоненты с необходимой эксплуатационной документацией. В связи с тем, что развитие и совершенствование программно-аппаратных средств происходит очень быстро, единообразной отечественной или зарубежной системы классификации САПР нет. Поэтому в разнообразных литературных источниках, а также в Интернете можно встретить различные подходы к классификации САПР. Наиболее часто САПР классифицируют по ряду признаков: сложности объектов проектирования, уровню автоматизации, уровню комплексности, числу выпускаемой проектной документации и числу уровней технического обеспечения, а иногда САПР классифицируют по приложениям, целевому назначению и масштабам (комплексности решаемых задач) [1], [3].

По приложениям наиболее представительными и широко используемыми являются следующие классы САПР:

- САПР для радиоэлектроники: в том числе системы ECAD (Electronic CAD) или EDA (Electronic Design Automation);
- САПР для применения в отраслях общего машиностроения (машиностроительные САПР или системы MCAD — Mechanical CAD);
- САПР в области энергетики, строительства и др.

Кроме того, известно большое число специализированных САПР, или выделяемых в указанных классах,

или представляющих самостоятельную ветвь в классификации (например, САПР летательных аппаратов, САПР проектирования интегральных схем и др.).

По целевому назначению различают САПР или подсистемы САПР, обеспечивающие разные аспекты и этапы проектирования.

По масштабам различают отдельные программно-методические комплексы (ПМК) САПР (комплекс анализа электронных схем, комплекс анализа прочности изделий и т. п.), совокупность ПМК и системы с уникальными архитектурами не только программного (software), но и технического (hardware) обеспечений.

ГОСТ Р ИСО/МЭК ТО 12182-2002 «Информационная технология. Классификация программных средств» устанавливает схему классификации любых программных продуктов, в том числе и САПР, охватывающую различные подходы к их классификации, а также наиболее важные характеристики и атрибуты, описывающие и определяющие данные программные средства (ПС) и их классы.

Как уже отмечалось выше, программная инженерия является быстро изменяющейся сферой деятельности, поэтому приведенная в данном стандарте схема классификации является эмпирической и может рассматриваться только в качестве концептуальной. Следовательно, ее применение на практике предполагает использование собственных подходов разработчиков и конечных пользователей программных средств. В связи с этим ГОСТ Р ИСО/МЭК ТО 12182-2002 носит только рекомендательный характер и строго его придерживаться необязательно.

В соответствии с указанным стандартом классификация программного продукта комбинируется из ряда видов программных средств, а каждый вид содержит классы, соответствующие данному виду, как показано на рисунке 1.2.

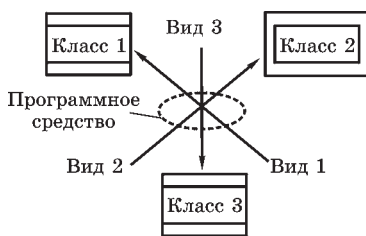


Рис. 1.2  
Принцип классификации программных средств

Следует заметить, что выбор классов, соответствующих конкретному виду, оставлен на усмотрение пользователя. Конкретный класс может присутствовать в разных видах, а область применения одного вида может перекрываться областью другого.

Схема классификации ПС представлена шестнадцатью видами, объединенными в три укрупненные группы (рис. 1.3).

Иногда для классификации конкретного ПС может быть достаточно одного вида или выбранного набора видов с конкретными классами. При применении схемы классификации к программным продуктам, для которых необходимо подмножество видов, надо использовать все соответствующие виды и связанные с ними классы. Например, при характеристике ПС по отношению к его среде может быть пригоден набор видов, составляющих подмножество из группы «Виды среды» (рис. 1.3). В зависимости от специфики ПС может быть необходимым использование дополнительных видов, например требования защиты или надежности. В отдельных случаях может быть достаточно использования единственного основного вида. Например, вид «Критичность программного средства» может являться основным для стандартов по обеспечению качества. В ряде случаев применения схемы классификации для представления наиболее специфичных характеристик ПС используется комбинация нескольких видов с конкретными классами. Так, для определения структуры документации могут применяться виды «Функция программного средства» и «Класс пользователя».

При использовании схемы классификации необходимо руководствоваться собственными соображениями при выборе классов для конкретного приложения или прикладной области. Рассмотрим перечень классов для каждого вида, представленного на рисунке 1.3, более подробно.

1. Для вида «Режим эксплуатации» классы надо определять в зависимости от технологий или типов обработки, принятых в данной системе программного обеспечения. Примерами классов режима эксплуатации служат:



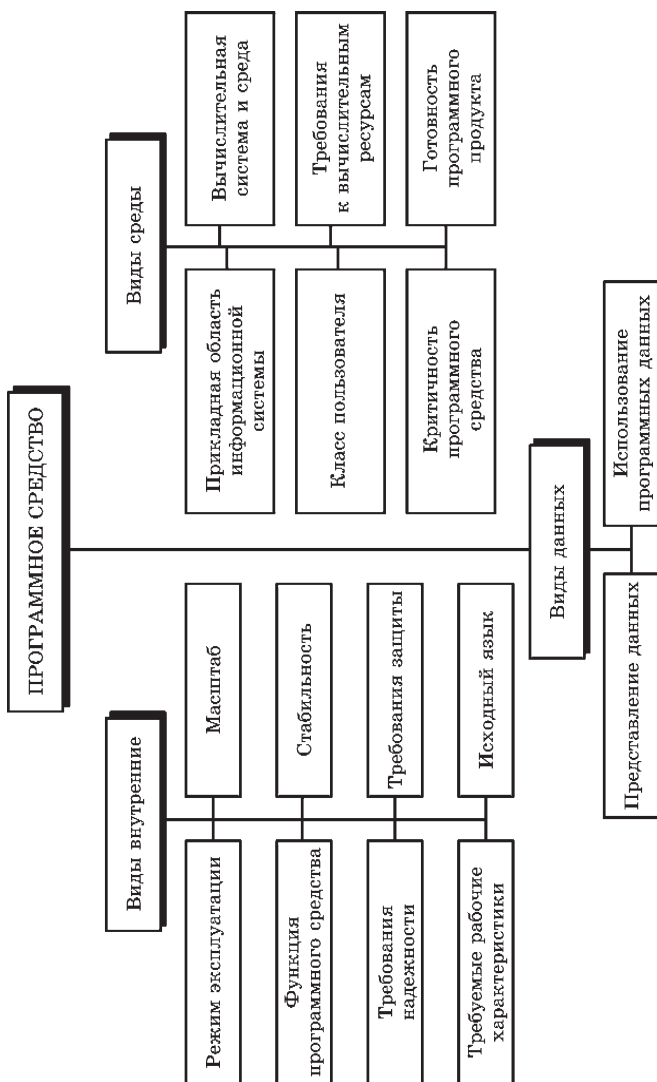


Рис. 1.3  
Распределение программных средств по группам и видам

- пакетная обработка данных;
- обработка данных в реальном масштабе времени;
- интерактивная обработка;
- последовательная обработка данных;
- параллельная обработка данных;
- совмещенная обработка данных.

2. Для вида «Масштаб» классы требуется определять в зависимости от размера или сложности ПС. Например, размер может быть определен в границах числа строк листинга исходной программы без учета комментариев на соответствующем языке программирования. Сложность ПС может оцениваться сложностью потока данных. Примерами классов масштаба программных средств являются:

- малый;
- средний;
- большой.

3. Для вида «Функция программного средства» классы необходимо определять в зависимости от типа функции, для которой они предназначены. Примерами классов функции ПС являются:

- обработка табличной информации;
- компиляция,
- научные вычисления;
- инженерные расчеты;
- обработка текстов;
- медицинские системы;
- системы управления.

4. Стабильность ПС должна определяться в зависимости от его внутренних эволюционных аспектов или стабильности в терминах характеристик системы, частью которой оно является. Примерами классов стабильности ПС являются:

- регулярное внесение изменений;
- периодическое внесение изменений;
- редкое внесение изменений.

5. Для вида «Требование надежности» ПС классифицируются по уровню требуемой надежности, включая завершенность, отказоустойчивость и восстанавливаемость. Пример классификации ПС по надежности приведен в таблице 1.1.

Таблица 1.1

**Классификация ПС по виду «Требование надежности»**

Критерий	Значение		
	высокое	среднее	низкое
Завершенность	+		
Отказоустойчивость		+	
Восстанавливаемость			+

6. Для вида «Требование защиты» ПС классифицируют по уровню защиты от несанкционированного доступа, контрольному следу и обеспечению устойчивости к внешним воздействиям. Пример классификации ПС по требованиям к защите показан в таблице 1.2.

Таблица 1.2

**Классификация ПС по виду «Требование защиты»**

Критерий	Значение		
	сильное	среднее	слабое
Защита от несанкционированного доступа	+		
Контрольный след			+
Защита программ и данных		+	

7. Для вида «Требуемые рабочие характеристики» классы надо определять в зависимости от производительности ПС в терминах «емкость», «производительность» или «длительность обработки», при этом оценка каждого класса выполняется по степени или уровню. Примерами классов требуемых рабочих характеристик являются:

- емкость (высокая, средняя, низкая);
- длительность обработки (быстрая, средняя, медленная);
- производительность (большая, средняя, малая).

8. Для вида «Исходный язык» классы определяются в зависимости от типа исходного языка программирования, используемого при разработке конкретного ПС. Примерами классов исходного языка являются:

- традиционный (Pascal, Fortran и т. д.);
- процедурный (C или ему подобный);
- функциональный (Lisp, Prolog или эквивалентный);
- объектно-ориентированный (C++, Object Pascal или равноценный).

9. Для вида «Прикладная область информационной системы» классы определяют в зависимости от типа или класса внешней системы, в которой они устанавливаются. Например, ПС, являющееся элементом системы управления производственными процессами, может классифицироваться как «ПС аппаратуры управления процессом», а ПС, которое является элементом сетевого коммуникационного оборудования — как «ПС управления сетью». Типичными примерами классов прикладной области являются:

- наука;
- бытовая аппаратура;
- производственное оборудование;
- аппаратура управления процессом;
- бизнес;
- система организации сети.

10. Для вида «Вычислительная система и среда» ПС должно быть рассмотрено с точки зрения его использования в конкретной целевой вычислительной системе. Примерами классов вычислительной системы и среды являются:

- микропроцессорные системы, в том числе персональные компьютеры, ноутбуки, рабочие станции;
- универсальные ЭВМ;
- специализированное микропрограммирование;
- операционная система;
- система реального времени.

11. Для вида «Класс пользователя» классы устанавливают в зависимости от уровня подготовки или характеристик пользователей, причем пользователем не обязательно может быть человек. Примерами классов пользователей служат:

- начинающий пользователь;
- пользователь средней подготовки;
- эксперт;
- обычный человек;
- другая система программного обеспечения;
- другие технические средства.

12. Для вида «Требования к вычислительным ресурсам» ПС должно быть охарактеризовано по отношению к требованиям, определяемым аппаратной частью вычис-

лительной системы. Примерами классов вычислительных ресурсов являются:

- требования к центральному процессору;
- требования к объему оперативной памяти;
- требования к внешней памяти;
- требования к видеосистеме;
- требования к локальной вычислительной сети.

13. Для вида «Критичность программного средства» классы должны определяться в зависимости от оценки уровня целостности продукции, с учетом конкретной методологии оценки и указанием степени значимости или важности класса. Альтернативно классы могут быть установлены по степени влияния последствий повреждений ПС (глобальное, региональное, международное и т. д.) или важности для общества (индивидуальное, групповое, деловое и т. п.). Повреждение ПС может влиять как на безопасность человеческой жизни, так и на способность ПС выполнять свое прямое назначение (компьютерная графика, обработка текста, инженерные расчеты и др.). Типичными примерами классов критичности ПС служат:

- национальная безопасность;
- человеческая жизнь и здоровье;
- социальные потрясения;
- безопасность организации;
- частная собственность;
- секретность.

14. Для вида «Готовность программного продукта» классы должны идентифицироваться в зависимости от типа имеющегося в наличии ПС. Примерами классов готовности ПС являются:

- наличие в готовом виде;
- заказное;
- общедоступное (Freeware);
- лицензионное.

15. Для вида «Представление данных» классы необходимо определять в зависимости от элементов, типов и структур данных. Примерами классов представления данных служат:

- последовательный;

- реляционный,
- индексируемый;
- сетевой;
- предметный;
- объектный;
- форматированный файл.

16. Для вида «Использование программных данных» классы выделяют в зависимости от типа применения программных данных. Примерами классов использования программных данных являются:

- однопользовательский;
- многопользовательский;
- корпоративный с удаленным доступом.

В качестве примера рассмотрим в соответствии с представленной схемой классификации САПР для разработки и оформления графической документации.

1. Функция программного средства — графический процессор.

2. Режим эксплуатации — интерактивная обработка.

3. Прикладная область информационной системы — инженерное проектирование (основное назначение), но программа полезна также для персонального или другого применения.

4. Масштаб ПС — большой (в сравнении с аналогичными САПР).

5. Представление данных — объектные для командной операции и форматированный файл для ввода-вывода.

6. Критичность ПС — экономично по времени и удобно для индивидуального использования.

7. Класс пользователя — средний (пользователь имеет навык работы с компьютером, но может не иметь навыков программирования).

8. Требуемые рабочие характеристики — средняя или высокая емкость (размер документа ограничен только доступностью вычислительных ресурсов). Время отклика — быстрое (принимает свыше 50 символов в секунду при вводе данных с мгновенной реакцией экрана). Производительность — высокая (одновременная работа над множеством документов).

9. Стабильность ПС — с контролируемым изменением (обычное обновление и новые версии).

10. Требование защиты: от несанкционированного доступа — слабая; защита данных — сильная (доступно использование пароля и шифрация данных).

11. Требования надежности: завершенность, отказоустойчивость и восстанавливаемость — высокие (программный продукт проходил ряд переделок и модернизаций).

12. Вычислительная система и среда — персональный компьютер (ноутбук) с 4-ядерным процессором Pentium IV 2,4 ГГц или лучше, видеокарта уровня GeForce 6600 GT или лучше, стандартная клавиатура, мышь, 64-разрядная операционная система Windows XP, Windows Vista, Windows 7 или Windows 8.

13. Требования к вычислительным ресурсам — память 4096 Мбайт ОЗУ или выше, объем видеопамати 1024 Мбайт или больше, свободное место на жестком диске не менее 10 Гбайт.

14. Готовность программного продукта — готовый коммерческий лицензионный.

15. Использование программных данных — выполняется обычно одним пользователем, но возможна и совместная работа группы пользователей в рамках проекта.

16. Исходный язык — высокоуровневый объектно-ориентированный.

## 1.5. ВИДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ САПР

Как и любая другая сложная система, САПР представляется в виде совокупности взаимосвязанных частей, среди которых принято выделять проектирующие и обслуживающие подсистемы [1], [3].

Проектирующие подсистемы непосредственно выполняют проектные процедуры. В качестве примеров могут рассматриваться подсистемы геометрического трехмерного моделирования механических объектов, изготовления конструкторской документации, схемотехнического анализа, трассировки соединений в печатных платах.

Обслуживающие подсистемы обеспечивают функционирование проектирующих подсистем, их совокупность часто называют системной средой (или оболочкой) САПР. К типичным обслуживающим относят подсистемы управления проектными данными, подсистемы разработки и сопровождения программного обеспечения, обучающие подсистемы для освоения пользователями технологий, использованных в САПР.

В САПР реализованы следующие системные принципы [1], [3].

1. Принцип включения, заключающийся в том, что САПР рассматривается как часть более сложной автоматизированной системы, например, CALS, которая определяет требования к функционированию и модернизации САПР.

2. Принцип системного единства, в соответствии с которым целостность САПР обеспечивается тесными связями между ее подсистемами.

3. Принцип комплексности, т. е. связность проектирования объектов на всех этапах жизненного цикла проекта.

4. Принцип информационного единства, означающий информационную согласованность всех подсистем САПР, в том числе использование единой терминологии, условных обозначений и способов представления информации. Это позволяет результаты решения одних задач в САПР рассматривать как исходные данные для других задач, многократно использовать файлы, содержащиеся в базах данных и т. д.

5. Принцип совместимости, в соответствии с которым обеспечивается совместимость используемых языковых, программных и технических средств САПР, их совместное функционирование и открытость структуры, т. е. введение в систему новых аппаратных средств и (или) компонентов программного обеспечения не должно приводить к значительным изменениям существующей САПР.

6. Принцип инвариантности, означающий максимальную универсальность используемых в САПР компонентов, методов и пакетов программ для проектирования



объектов определенного класса. Примерами таких пакетов являются программы решения задач структурного и параметрического синтеза, расчета надежности и др.

7. Принцип развития означает, что САПР является развивающейся системой, в которую вводятся новые подсистемы и компоненты, увеличиваются функциональные возможности, расширяется спектр решаемых проектных задач.

Структурирование САПР по различным аспектам обуславливает появление видов обеспечения САПР. Согласно ГОСТ 23501.101-87 «Системы автоматизированного проектирования. Основные положения» и РД 50-680-88 «Методические указания. Автоматизированные системы. Основные положения» выделяют следующие виды обеспечения САПР (рис. 1.4).

1. Математическое обеспечение (МО) объединяет математические модели, методы и алгоритмы обработки информации, используемые при автоматизированном проектировании. Элементы математического обеспечения САПР чрезвычайно разнообразны. К ним относятся методы построения моделей проектируемого устройства ЭС, численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений, поиска экстремума функционала и т. д. Практическое использование математического обеспечения происходит после его реализации в программном обеспечении.

2. Программное обеспечение (ПО) представляет совокупность программ на носителях информации (дискетах, оптических или жестких дисках и др.) с программной документацией.

3. Лингвистическое обеспечение выражено языковыми средствами для формализации естественного языка, построения и сочетания информационных единиц, используемых в САПР при функционировании системы для общения с комплексом средств автоматизации, а также между проектировщиками и ЭВМ.

4. Информационное обеспечение состоит из совокупности системно-ориентированных данных, описывающих принятый в системе словарь базовых описаний (класси-

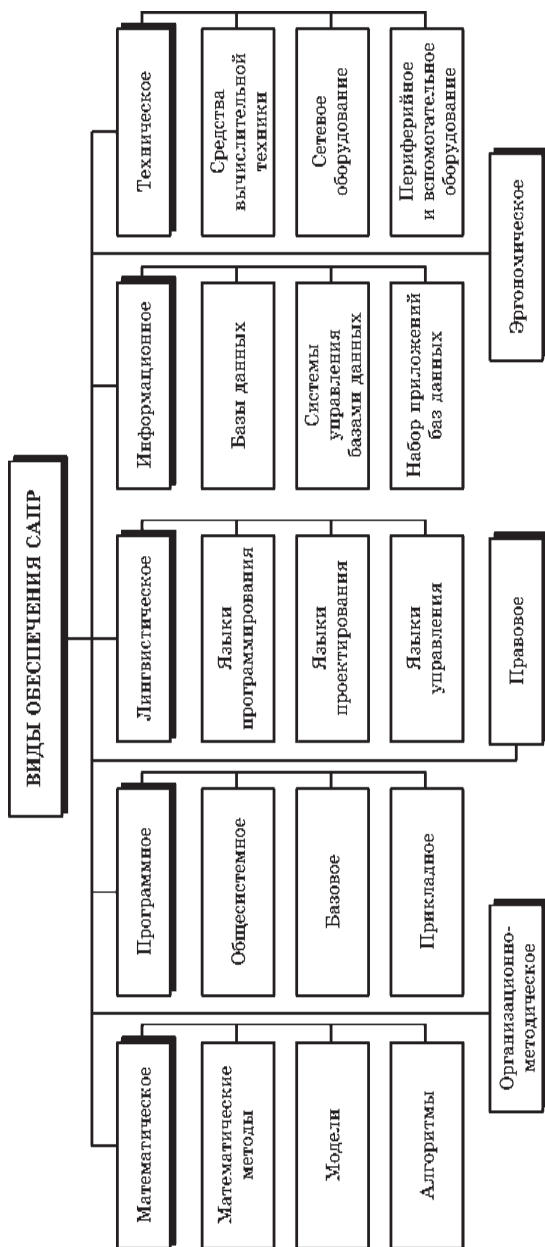


Рис. 1.4

Структура основных видов обеспечения САЭР

фикаторы, типовые модели, форматы документов и др.) и актуализированных данных о состоянии информационной модели объекта проектирования на всех этапах его жизненного цикла. Основная часть информационного обеспечения САПР представлена базой данных (БД) и системой управления БД (СУБД).

5. Техническое (аппаратное) обеспечение включает в себя средства реализации управляющих воздействий, а также средства получения, ввода, подготовки, преобразования, обработки, хранения, регистрации, вывода, отображения, использования и передачи данных с конструкторской и эксплуатационной документацией.

6. Организационно-методическое обеспечение представлено документами, определяющими организационную структуру объекта и системы автоматизации, необходимыми для выполнения конкретных автоматизируемых функций, деятельности в условиях функционирования системы, а также формы представления результатов этой деятельности.

7. Правовое обеспечение состоит из нормативно-правовых материалов, регламентирующих правоотношения при функционировании САПР, и юридического статуса результатов ее функционирования.

8. Эргономическое обеспечение объединяет взаимосвязанные требования, направленные на согласование психологических, психофизиологических, антропометрических характеристик и возможностей человека, характеристик САПР, параметров рабочей среды на рабочем месте.

Перечисленные виды обеспечения составляют основу любой САПР ЭС, однако наиболее важными с точки зрения функционирования системы являются математическое, программное, лингвистическое, информационное и техническое обеспечения.

### **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что включает в себя понятие проектирования?
2. В чем состоит сущность функционального подхода к проектированию?

3. Какими особенностями характерен оптимальный подход к проектированию?
4. На каких принципах основан системный подход к проектированию?
5. Какие основные задачи проектирования приходится решать при разработке ЭС?
6. В чем состоит идея «цикла обновления»?
7. На какие цели ориентированы задачи анализа и синтеза при проектировании ЭС?
8. Какими общими свойствами сложных технических систем обладают ЭС?
9. Какие специфические особенности выделяют ЭС в классе технических объектов с точки зрения выполнения проектных работ?
10. Что представляют собой функциональное, конструкторское, технологическое и информационное описания ЭС?
11. На каких общесистемных принципах базируется автоматизированное проектирование ЭС?
12. По каким признакам классифицируют САПР?
13. Как классифицируют САПР согласно ГОСТ Р ИСО/МЭК ТО 12182-2002?
14. Каков состав основных видов обеспечения САПР?
15. Что представляют собой проектирующие и обслуживающие подсистемы?

## ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА САПР ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

**Д**ля правильного понимания роли и назначения математического аппарата САПР необходимо хорошо представлять себе особенности проблем, возникающих в ходе создания изделий ЭС, для разрешения которых применяется широкий спектр моделей и методов из различных областей математики.

### 2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ САПР

Математическое обеспечение САПР в целом характеризуется как совокупность математических моделей объектов проектирования, методов и алгоритмов выполнения проектных операций и процедур [1], [3], [6].

В математическом обеспечении можно условно выделить специальную и инвариантную части. Специальная часть в значительной мере отражает конкретную специфику объекта проектирования, физические и информационные особенности его функционирования. В эту часть включен весь спектр математических моделей, методов и алгоритмов решения задач проектирования, методов и алгоритмов анализа и синтеза технических устройств. Инвариантная часть состоит из методов и алгоритмов, слабо связанных с особенностями математических моделей конкретных объектов и используемых на разных уровнях системной иерархии.

Состав и свойства математического обеспечения оказывают непосредственное, а в большинстве случаев и опре-

деляющее влияние на функциональные характеристики САПР, поэтому для правильного выбора или разработки моделей, методов и алгоритмов необходимо учитывать ряд требований, предъявляемых к МО САПР [1], [3], [6]. Основными из них являются требования к универсальности, алгоритмической надежности, точности, быстродействию и используемым вычислительным ресурсам.

Требование универсальности позволяет применять МО к широкому классу проектируемых технических объектов. Высокая степень универсальности МО нужна для того, чтобы обеспечить возможность применения САПР к большинству объектов, проектируемых на предприятии. Например, в подсистеме схмотехнического проектирования применяют математические модели функционирования транзистора, справедливые для любого режима его работы, а методы получения и анализа моделей применимы к любой схеме.

Требование алгоритмической надежности выражается свойством алгоритмов МО давать правильные результаты при проектировании с его использованием. Проверка на соблюдение этого требования особенно актуальна при использовании эвристических алгоритмов. Достоинством этих методов и алгоритмов является их высокое быстродействие, поэтому, несмотря на то, что они не гарантируют получение оптимального результата, в САПР они применяются достаточно широко. Количественной оценкой алгоритмической надежности служит вероятность получения достоверных результатов при выполнении заранее заданных ограничений на применение метода. Проблема алгоритмической надежности тесно связана с проблемой обусловленности математических моделей и задач. Плохая обусловленность приводит к получению существенных искажений результатов при малых погрешностях исходных данных. На каждом этапе вычислений имеются свои промежуточные исходные данные и результаты, в том числе и свои источники погрешностей, а плохая обусловленность приводит к росту погрешностей, что в итоге снижает точность конечного результата.

Требование к точности методов и алгоритмов является важным для большинства компонентов МО. Оценка точности проводится по степени совпадения расчетных и истинных результатов. Алгоритмически надежные методы могут давать различную точность. В отдельных случаях, когда точность оказывается хуже предельно допустимых значений, решение или вообще невозможно получить, или оно неверно. Здесь приходится говорить уже не о точности, а об алгоритмической надежности. Для большинства проектных ситуаций решение задач характеризуется совместным использованием многих компонентов МО и векторным характером результатов, что затрудняет определение вклада в общую погрешность каждого из компонентов. В связи с этим оценка точности производится с помощью особых вычислительных экспериментов, основанных на использовании специальных, так называемых тестовых задач.

Требование к быстродействию обусловлено сравнительно большим объемом вычислений, растущим с увеличением размерности задач. Поэтому при решении большинства задач в САПР затраты машинного времени значительны. Обычно именно продолжительность вычислительных операций служит главным сдерживающим фактором повышения сложности проектируемых на ЭВМ объектов и точности моделей для их исследования. Следовательно, быстродействие, определяемое затратами машинного времени, является одним из основных требований к МО САПР. Один из способов повысить быстродействие предусматривает применение многопроцессорных суперЭВМ или рабочих станций, построенных на базе многоядерных процессоров и позволяющих проводить параллельные вычисления.

Требование к используемым вычислительным ресурсам определяет второй по значимости после быстродействия показатель экономичности МО, оцениваемый величиной затрат машинной памяти при решении прикладной задачи в САПР. Затраты памяти определяются объемом программных модулей, загружаемых в память и размером используемых массивов данных. Несмотря

на достаточно большой объем оперативной памяти в современных ЭВМ, экономичность затрат памяти остается актуальной проблемой. Это связано с тем, что в многозадачном режиме функционирования ЭВМ программа с запросом большого объема памяти получает более низкий приоритет и в результате время ее пребывания в системе увеличивается.

Разработка компонентов математического аппарата САПР (в первую очередь математических моделей) должна проводиться с учетом специфики каждого из иерархических уровней проектирования [1], [3]. В соответствии с блочно-иерархическим подходом принято выделять микроуровень, макроуровень, функционально-логический и системный уровни.

На микроуровне математические модели представлены в виде дифференциальных уравнений в частных производных вместе с граничными условиями. Такими моделями описываются объекты с распределенными параметрами, в качестве которых рассматриваются, например, поля физических величин. Модели подобного вида используются при анализе прочности конструкций или деталей, исследовании процессов в жидких и газовых средах, моделировании движения частиц и т. п. Решение дифференциальных уравнений в частных производных выполняется численными методами, основанными на дискретизации независимых переменных, т. е. на их представлении конечным множеством значений в выбранных узловых точках исследуемого пространства.

На количество совместно исследуемых различных сред в используемых на практике моделях микроуровня накладываются ограничения из-за сложностей вычислительного характера. Уменьшить вычислительные затраты при исследовании многокомпонентных сред можно, применив иной подход к моделированию, основанный на принятии определенных допущений. Так, допущение, выражаемое дискретизацией пространства, позволяет перейти к моделям макроуровня.

Моделями макроуровня являются системы алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений,



поскольку независимой переменной здесь обычно остается только время. Такими моделями описываются объекты с сосредоточенными параметрами, однако получение аналитических решений для таких моделей в практических задачах затруднительно, поэтому в САПР преимущественно используются алгоритмические модели на основе компонентных (описывающих свойства элементов системы) и топологических (описывающих взаимосвязи в составе моделируемой системы) уравнений. Совокупность компонентных и топологических уравнений конкретного объекта определяет исходную математическую модель системы [1], [3].

Анализ процессов в ЭС проводят во временной и частотной областях. Анализ во временной области, или динамический анализ, позволяет получить картину переходных процессов, оценить динамические свойства как линейных, так и нелинейных систем. Анализ в частотной области применяют, как правило, к объектам с линеаризуемыми моделями при исследовании колебательных стационарных процессов, анализе устойчивости и т. п.

Следует заметить, что когда число компонентов исследуемой системы больше некоторой величины, то сложность макромоделей системы становится чрезмерной. В этом случае переходят на функционально-логический уровень, на котором исследуют устройства, в качестве элементов которых принимают достаточно сложные узлы и блоки, рассматривавшиеся как самостоятельные объекты при моделировании на макроуровне. В случае необходимости производится упрощение моделей составных частей по сравнению с их представлением на макроуровне. Для исследования непрерывных процессов используется аппарат передаточных функций или частотных характеристик, а если объектом исследования является дискретный процесс, то методы математической логики и конечных автоматов [1], [3], [6].

При исследовании объектов большой сложности, например производственное предприятие, вычислительные системы и сети, социальные системы и др., моделирование

ведется на системном уровне. Здесь широко применяют методы теории массового обслуживания, сетей Петри и др.

Моделирование и анализ различных технических объектов являются необходимыми составными частями процесса проектирования, сущность которого заключается в принятии проектных решений, обеспечивающих выполнение сконструированным объектом предъявляемых к нему требований. Успешное осуществление процедур синтеза проектных решений во многом определяет потребительские свойства будущего изделия. По результатам анализа формируется необходимая информация для выполнения процедур синтеза в процессе проектирования.

Принятие проектных решений охватывает широкий спектр решаемых задач — от выбора из множества альтернативных вариантов до творческих задач, не имеющих формальных способов решения. Поэтому арсенал МО САПР включает как средства формального синтеза проектных решений, выполняемого в автоматическом режиме, так и вспомогательные средства для синтеза в интерактивном режиме. К таким вспомогательным средствам относятся БД типовых проектных решений, системы обучения проектированию, ПМК верификации проектных решений, системы поддержки принятия решения и др.

Задачи синтеза структур проектируемых объектов считаются наиболее плохо формализуемыми, основная сложность заключается в преобразовании исходного описания проектируемого объекта в результирующее. Исходное описание содержит информацию о свойствах объекта, условиях функционирования, наложенных ограничениях и т. п., а результирующее описание должно содержать сведения о структуре, т. е. о составе и взаимосвязи элементов. В настоящее время выработан ряд подходов для обобщенного описания задач принятия проектных решений в процессе структурного синтеза.

Особое место в математическом аппарате САПР отведено обеспечению подсистем машинной графики (МГ) и геометрического моделирования (ГМ), занимающих одно из центральных мест в САПР для областей радиоэлектроники, машиностроения, архитектуры и др. Про-

ектирование изделий в них ведется в интерактивном режиме с использованием геометрических моделей, отображающих форму деталей, состав сборочных единиц и некоторые дополнительные параметры (масса, цвет и т. п.). Поэтому основу математического обеспечения МГ и ГМ прежде всего составляют модели, методы и алгоритмы для геометрического моделирования и подготовки к визуальному отображению. Различают математическое обеспечение двумерного (2D) и трехмерного (3D) моделирования. Основное применение 2D-графики — подготовка чертежной документации в машиностроительных САПР, проектирование топологии печатных плат и кристаллов интегральных схем в САПР электронной промышленности [1], [3], [6].

Особенности предметной области проектирования ЭС определяют специфику применяемых математических моделей, методов и алгоритмов и соответственно ПО САПР. В математическом плане область проектирования ЭС опирается на такие разделы математики, как линейные и нелинейные дифференциальные уравнения, теория случайных процессов, математический анализ, матричная алгебра, теория множеств, теория графов и др. Значительное число алгоритмов, реализуемых в САПР для решения задач конструкторского проектирования ЭС (построение математических моделей, компоновка, размещение, трассировка, формализация описаний схем и т. п.), рассмотренных в настоящем учебном пособии, базируется на использовании теории множеств, алгебры логики и теории графов.

## 2.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Множество является одним из ключевых понятий математики, в частности таких ее разделов, как теория множеств и логика [10], [11]. Существует несколько формулировок описаний множества. Так, согласно Г. Кантору, множество — это «единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством». Эти объекты он назвал элементами множества. Другая известная формулировка

принадлежит Б. Расселу: «Множество есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое».

Объекты, из которых состоит множество, называют элементами или точками множества. Различают конечные, бесконечные, одноэлементные и пустые ( $\emptyset$ ) множества. Если все рассматриваемые в ходе какого-либо рассуждения множества являются подмножествами некоторого другого множества, то это множество называется универсальным множеством и обозначается  $\cup$ . Множества чаще всего обозначают заглавными буквами латинского алфавита, а его элементы — строчными. Приведем примеры математической записи множеств:

$$A = \{a, b, c, \dots, k\}; \quad A = \{a_1, a_2, a_3\};$$

$$A = \{A_i\}, \quad i = \overline{1, n}; \quad A = \{11, 3, 7, 24\}.$$

Если  $a$  — элемент множества  $A$ , то записывают  $a \in A$  ( $a$  принадлежит  $A$ ). В случае, когда  $a$  не является элементом множества  $A$ , то записывают  $a \notin A$  ( $a$  не принадлежит  $A$ ). В отличие от мультимножества (множества с кратными элементами), каждый элемент множества уникален, и в множестве не может быть двух одинаковых элементов. Другими словами, добавление к множеству элементов, идентичных уже принадлежащим множеству, не меняет его:  $\{7, 30\} = \{30, 7\} = \{30, 30, 7, 30, 7\}$ .

Число элементов, составляющих множество, называется мощностью или кардинальным числом множества. Обычно мощность множества  $A$  обозначается через  $|A|$ , но иногда можно встретить и другие обозначения, в частности  $\#A$  или  $\text{card}(A)$ . Например, для множества  $A = \{1, 2, 3\}$  его мощность  $|A| = 3$ .

Все элементы любого множества распределены между нижней и верхней границами, в качестве которых рассматриваются минимальный и максимальный элементы. Так, например, для множества  $N = \{a, b, c, d\}$ , где  $a=2$ ,  $b=4$ ,  $c=8$ ,  $d=12$ , нижней границей служит элемент  $a$ , верхней — элемент  $d$ .

Два множества ( $A$  и  $B$ ) могут вступать друг с другом в различные отношения:

- $A$  включено в  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  принадлежит также и множеству  $B$ , т. е.

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall a \in A: a \in B;$$

- $A$  включает  $B$ , если  $B$  включено в  $A$ , т. е.

$$A \supseteq B \leftrightarrow B \subseteq A;$$

- $A$  равно  $B$ , если  $A$  и  $B$  включены друг в друга, т. е.

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A);$$

- $A$  строго включено в  $B$ , если  $A$  включено в  $B$ , но не равно ему, т. е.

$$A \subset B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \neq A);$$

- $A$  строго включает  $B$ , если  $B$  строго включено в  $A$ , т. е.

$$A \supset B \leftrightarrow B \subset A;$$

- $A$  и  $B$  не пересекаются, когда у них нет общих элементов, т. е. при

$$A \cap B = \emptyset \leftrightarrow \forall a \in A: a \notin B;$$

- $A$  и  $B$  находятся в общем положении, если существует элемент, принадлежащий исключительно множеству  $A$ , элемент, принадлежащий исключительно множеству  $B$ , а также элемент, принадлежащий обоим множествам, т. е. когда

$$\exists a, b, c: (a \in A) \wedge (a \notin B) \wedge (b \in B) \wedge (b \notin A) \wedge (c \in A) \wedge (c \in B).$$

Любое множество может рассматриваться как составная часть другого множества. Например, множество  $B$  считается подмножеством множества  $A$ , если любой элемент из множества  $B$  также принадлежит множеству  $A$ , т. е.  $(A \subset B) \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$ . Множество  $B$  называется надмножеством множества  $A$ , если  $A$  — подмножество  $B$ . Следует заметить, что любое непустое множество содержит не менее двух подмножеств: пустое и само себя.

Рассмотрим основные операции алгебры множеств.

1. *Объединение* множеств  $A$  и  $B$  есть множество  $C$ , состоящее из элементов множеств  $A$  и  $B$ :

$$A \cup B = C \leftrightarrow A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

2. *Пересечение* множеств  $A$  и  $B$  составляет множество  $C$ , элементы которого принадлежат и множеству  $A$ , и множеству  $B$ :

$$A \cap B = C \leftrightarrow A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

3. *Разность* множеств  $A$  и  $B$  есть множество  $C$ , элементы которого принадлежат множеству  $A$ , но не принадлежат множеству  $B$ :

$$A \setminus B = C \leftrightarrow A \setminus B := A \cap \bar{B} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

4. *Симметрическая разность* множеств  $A$  и  $B$  есть такое множество  $C$ , куда входят все те элементы множества  $A$ , которые не входят в множество  $B$ , а также те элементы множества  $B$ , которые не входят в множество  $A$ :

$$\begin{aligned} A \Delta B = C \leftrightarrow A \Delta B &:= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}. \end{aligned}$$

5. *Декартово (прямое) произведение* множеств  $A$  и  $B$  есть множество  $C$ , элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары элементов исходных двух множеств:

$$A \times B = C \leftrightarrow A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

На рисунке 2.1а–г приведены графические интерпретации основных бинарных операций над множествами.

Для преобразования множеств используется ряд законов, основанных на рассмотренных выше операциях.

1. *Коммутативный*:

$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A; A \Delta B = B \Delta A.$$

2. *Ассоциативный*:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

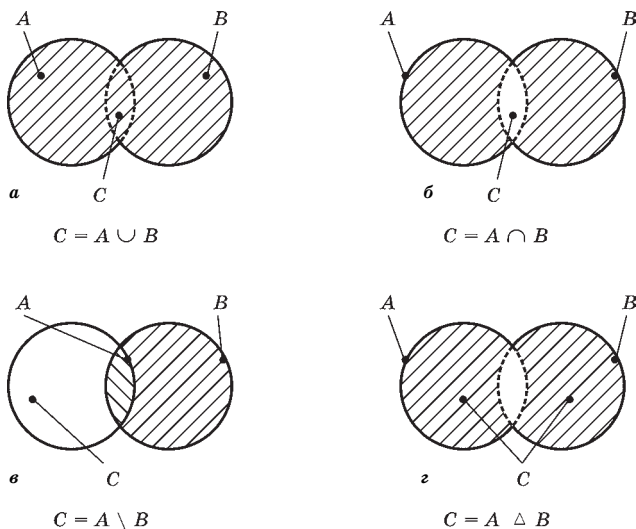


Рис. 2.1

Графические интерпретации операций над множествами:

а — объединение; б — пересечение; в — разность; г — симметрическая разность.

**3. Дистрибутивный:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**4. Идемпотентности:**

$$A \cup A = A; A \cap A = A;$$

$$A \cup U = U; A \cap U = U;$$

$$A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset.$$

**5. Поглощения:**

$$A \cup (A \cap B) = A; A \cap (A \cup B) = A.$$

**6. Де Моргана:**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

**7. Инволюции:**

$$\overline{\bar{A}} = A.$$

8. *Исключенного третьего:*

$$A \cup \bar{A} = U; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

$$\overline{\emptyset} = U; \quad \overline{U} = \emptyset.$$

Например, пусть требуется упростить искомое множество  $G = E \cup F$ , в котором  $E = (A \cap B) \setminus C$ , а  $F = (B \cap C) \setminus A$ . Используя законы алгебры множеств, получим

$$\begin{aligned} G &= [(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] = [(A \cap B) \cap \bar{C}] \cup [(B \cap C) \cap \bar{A}] = \\ &= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) = B \cap [(A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C)] = B \cap (A \Delta C). \end{aligned}$$

Во многих случаях к составу множества накладываются дополнительные требования, обусловленные спецификой решаемой задачи. Так, часто необходимо заполнить множество элементами не в случайном порядке, а упорядоченно, например по возрастанию или убыванию значений. Такой упорядоченный набор, т. е. множество, для элементов которого задается местоположение, называется *кортежем*. Компонентами кортежа могут быть любые элементы, в том числе множества и другие кортежи.

Например, математическая запись кортежа  $A$  может иметь следующий вид:  $A = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ . Число элементов, составляющих кортеж, определяют его длину. Для рассмотренного кортежа  $A$  его длина  $|A| = 4$ .

Кортеж, состоящий из двух компонентов  $\langle a_1, a_2 \rangle$ , часто называют парой, из трех компонентов  $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  — тройкой, из  $n$  компонентов  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  —  $n$ -кой.

Отношения между кортежами, операции над ними и основные законы преобразования кортежей аналогичны рассмотренным для обычных множеств. Например, кортежи  $A = \langle a_1, a_2 \rangle$  и  $B = \langle b_1, b_2 \rangle$  считаются равными, если равны их компоненты:  $A = B$  при  $a_1 = b_1$  и  $a_2 = b_2$ .

### 2.3. ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Теоретической основой построения алгоритмического и программного обеспечения САПР являются специальные математические дисциплины, одной из которых является



алгебра логики. Основоположителем этой дисциплины был английский математик XIX столетия Дж. Буль, поэтому иногда алгебру логики называют булевой алгеброй. Ее аппарат широко используют для описания схем цифровых устройств, их оптимизации и проектирования.

Алгебра логики относится к разделу математической логики, в котором изучаются логические операции над высказываниями [11]. Необходимо отметить, что под высказыванием понимается всякое предложение, в котором содержится смысл утверждения (истинности) или отрицания (ложности). Одно и то же высказывание не может одновременно являться истинным и ложным. Рассматриваются только два значения высказывания: истинное или ложное (1 или 0). Отдельные высказывания принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита  $A, B, C, \dots$ . Если высказывание (суждение) истинно, то записывают:  $A=1$ . Запись  $C=0$  означает, что высказывание  $C$  ложно. Такое условие алгебры логики приводит к соответствию между логическими высказываниями в математической логике и двоичными цифрами в двоичной системе счисления, что позволяет описывать работу схем цифровых устройств и проводить их анализ и синтез с помощью алгебры логики.

Алгебра логики предусматривает множество логических операций. Однако три из них заслуживают особого внимания, так как с их помощью можно описать все остальные, такие как эквивалентность  $\leftrightarrow$  («тогда и только тогда, когда»), импликация  $\rightarrow$  («следовательно»), сложение по модулю два  $\oplus$  («исключающее или»), штрих Шеффера  $|$ , стрелка Пирса  $\downarrow$  и др. Такими главными логическими операциями являются конъюнкция (И) или (AND), дизъюнкция (ИЛИ) или (OR) и отрицание (НЕ) или (NOT). Обычно конъюнкцию обозначают знаками  $\&$  или  $\wedge$ , дизъюнкцию —  $\vee$ , а отрицание — чертой над переменной, обозначающей высказывание.

При конъюнкции истина сложного выражения возникает лишь в случае истинности всех простых выражений, из которых состоит сложное. Во всех остальных случаях сложное выражение будет ложно.

При дизъюнкции истина сложного выражения наступает при истинности хотя бы одного входящего в него простого выражения или двух сразу. Бывает, что сложное выражение состоит более чем из двух простых. В этом случае достаточно, чтобы одно простое было истинным и тогда все высказывание будет истинным.

Отрицание — это унарная операция, так как выполняется по отношению к одному простому выражению или по отношению к результату сложного. В результате отрицания получается новое высказывание, противоположное исходному.

Логические операции удобно описывать так называемыми таблицами истинности, отражающими результаты вычислений сложных высказываний при различных значениях исходных простых высказываний. Простые высказывания обозначаются переменными (например,  $x$  и  $y$ ). В таблице 2.1 приведены основные результаты бинарных логических операций.

Таблица 2.1

Бинарные логические операции

$x$	$y$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Приведенные в таблице 2.1 функции  $f$  над переменными  $x$ ,  $y$  имеют следующие значения:

- $f_1(x, y) = x \& y = x \cdot y = x \wedge y = \min(x, y)$  — конъюнкция (И);
- $f_2(x, y) = x \vee y = \max(x, y)$  — дизъюнкция (ИЛИ);
- $f_3(x, y) = x \equiv y = x \leftrightarrow y$  — эквивалентность;
- $f_4(x, y) = x \oplus y$  — сумма по модулю два (исключающее ИЛИ);
- $f_5(x, y) = x \leftarrow y = x \subset y$  — импликация от  $y$  к  $x$ ;
- $f_6(x, y) = x \rightarrow y = x \supset y$  — импликация от  $x$  к  $y$ ;
- $f_7(x, y) = x \downarrow y$  — стрелка Пирса (функция Вебба, ИЛИ-НЕ);
- $f_8(x, y) = x | y$  — штрих Шеффера (И-НЕ);
- $f_9(x, y), f_{10}(x, y)$  — инверсии импликаций  $f_5$  и  $f_6$ ;

- $f_{11}$ – $f_{14}$  — функции одного аргумента;
- $f_{15}$ ,  $f_{16}$  — тождества.

Алгебра логики устанавливает целый ряд законов, с помощью которых возможно преобразование логических функций  $f(x, y)$ . Так как высказывания в алгебре логики строятся над непустым множеством, над элементами которого определены три основных операции — конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, то поэтому законы преобразования логических функций аналогичны рассмотренным в § 2.2 законам преобразования множеств. Впоследствии булева алгебра была обобщена от логики высказываний путем введения характерных для логики высказываний аксиом. Это позволило рассматривать, например, логику кубитов, тройственную логику (когда есть три варианта истинности высказывания: «истина», «ложь», «не определено») и др.

Проблема минимизации логических функций решается на основе применения законов склеивания и поглощения с последующим перебором получаемых дизъюнктивных форм и выбором из них оптимальной (минимальной). Существует большое количество методов минимизации логических функций [12]. Все они отличаются друг от друга спецификой применения операций склеивания и поглощения, а также различными способами сокращения переборов. Среди аналитических методов наиболее известным является метод Квайна — Мак-Класки, среди табличных — метод с применением диаграмм Вейча. Графические методы минимизации отличаются большей наглядностью и меньшей трудоемкостью, однако их применение эффективно при малом числе переменных ( $n \leq 5$ ).

Алгебра логики послужила основным математическим инструментом при создании цифровых устройств, в том числе микропроцессорной техники и компьютеров. Она легко преобразуется в битовую логику: истинность высказывания обозначается одним битом (0 — ЛОЖЬ, 1 — ИСТИНА). Поэтому при проектировании цифровых устройств, анализе их схем с использованием средств САПР широко используется технический способ задания

функций алгебры логики с помощью так называемых логических функциональных элементов. К таким элементам относят всякие технические устройства с  $n$  входами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и одним выходом  $y$ , обладающим двумя устойчивыми состояниями, которые кодируются символами «0» и «1».

В качестве примера на рисунке 2.2 приведены функциональные элементы, реализующие приведенные в таблице 2.1 логические операции.

Результатом технической интерпретации логических функций является законченная схема цифрового устройства. В ходе работ над проектом обычно придерживаются следующей последовательности действий:

- словесное описание;
- формализация словесного описания работы схемы;
- запись функций в дизъюнктивной (конъюнктивной) совершенной нормальной форме по таблицам истинности;
- минимизация логических зависимостей с целью их упрощения;

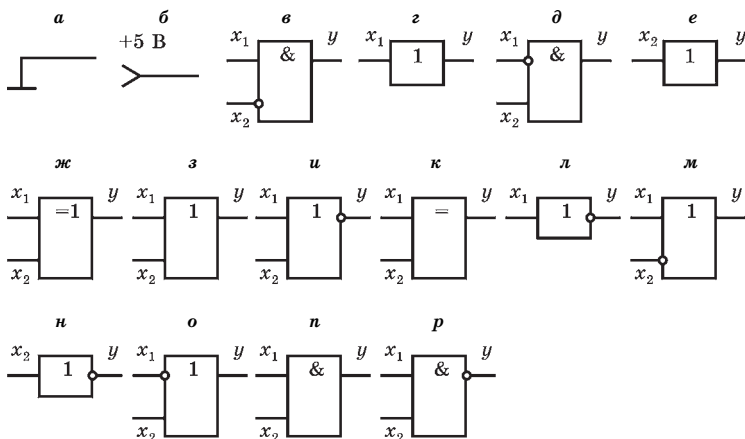


Рис. 2.2

Реализация функций алгебры логики на функциональных элементах:

*a* — логический «0»; *б* — логическая «1»; *в* — запрет  $x_1$ ; *г* — повторение  $x_1$ ; *д* — запрет  $x_2$ ; *е* — повторение  $x_2$ ; *ж* — сложение по модулю два; *з* — дизъюнкция; *и* — стрелка Пирса; *к* — эквивалентность; *л* — отрицание  $x_1$ ; *м* — импликация  $x_1$ ; *н* — отрицание  $x_2$ ; *о* — импликация  $x_2$ ; *п* — конъюнкция; *р* — штрих Шеффера.

- представление полученных выражений в выбранном логически полном базисе элементарных функций;
- построение схемы устройства;
- проверка работоспособности полученной схемы с использованием средств САПР;
- макетирование и отладка опытных образцов;
- запуск в производство.

## 2.4. ГРАФЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

Теорией графов называется раздел дискретной математики, изучающий свойства графов. В общем смысле граф представляется как множество вершин (узлов), соединенных ребрами (связями). С математической точки зрения граф представляет собой совокупность двух множеств — вершин и ребер, т. е.  $G(V, R)$ ;  $V = \{v_i\}$ ,  $R = \{r_{kj}\}$ .

Строго говоря,  $V$  является подмножеством любого счетного множества, а  $R$  — подмножеством  $V \times V$ . Другими словами, граф представляет собой множество, каждый элемент которого является кортежем.

При изображении графов на рисунках чаще всего используется следующая система обозначений: вершины графа изображаются точками или (при конкретизации смысла вершины) прямоугольниками, овалами и др., где внутри фигуры раскрывается смысл вершины (графы блок-схем алгоритмов, электрических схем и пр.). Если между вершинами существует ребро, то соответствующие точки (фигуры) соединяются отрезком или дугой. В случае ориентированного графа дуги заменяют стрелками или явно указывают направленность ребра.

Различают планарные и непланарные графы. Планарный граф можно изобразить на рисунке без пересечения ребер, например в простейшем случае в виде треугольника или пары связанных вершин. Если пересечения ребер избежать не удастся, то говорят о непланарном графе. Когда граф не содержит циклов, т. е. путей однократного обхода ребер и вершин с возвратом в исходную вершину, его принято называть «деревом». Важные виды деревьев в теории графов — бинарные деревья, где каждая вершина

имеет одно входящее ребро и ровно два выходящих или является конечной, не имеющей выходящих ребер.

К настоящему времени нет окончательно сформировавшейся терминологии в области теории графов. Большинство специалистов по теории графов употребляют в книгах, статьях и лекциях собственную терминологию. Даже термин «граф» не является безусловным. Так, некоторые авторы под графом имеют в виду такие понятия, как «мультиграф», «псевдограф», «ориентированный граф» или «сеть». Скорее всего единообразие в терминологии теории графов никогда не будет достигнуто [13].

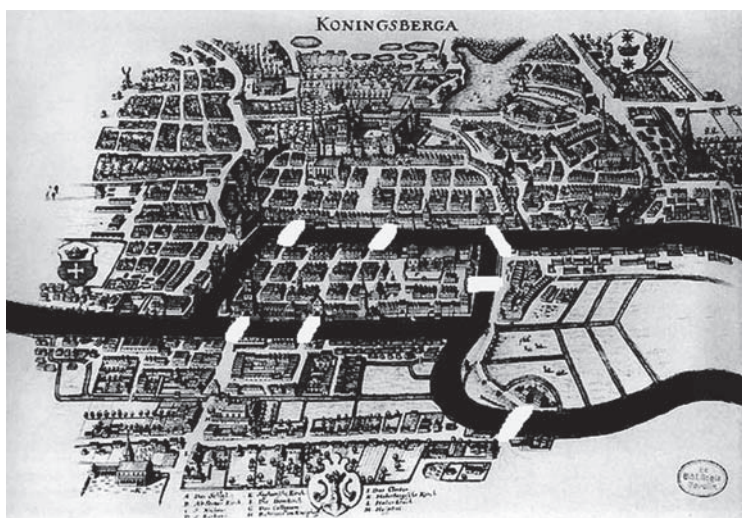
Родоначальником теории графов считается немецкий и русский математик, член Петербургской академии наук Леонард Эйлер. В 1736 г. в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о семи кенигсбергских мостах, ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов.

Издавна среди жителей Кенигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды (рис. 2.3). Некоторые горожане пытались решить эту задачу как теоретически, так и практически, во время прогулок. Впрочем, доказать или опровергнуть возможность существования такого маршрута никто не мог.

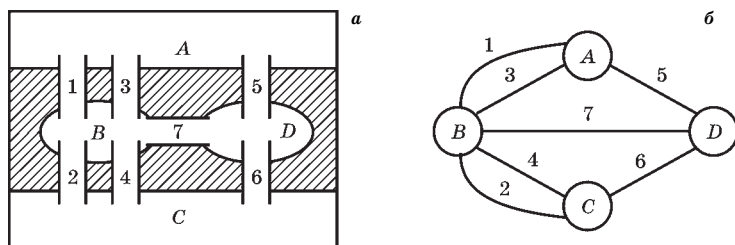
Эйлер смог найти правило, пользуясь которым, легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них. На упрощенной схеме парка (рис 2.4а) мостам соответствуют ребра графа, а частям города — точки их соединения (вершины графа), как показано на рисунке 2.4б.

В ходе рассуждений Эйлер пришел к следующим выводам:

- число нечетных вершин (вершин, к которым ведет нечетное число ребер) графа должно быть четно. Не может существовать граф, который имел бы нечетное число нечетных вершин;
- если все вершины графа четные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом мож-



**Рис. 2.3**  
Мосты парка города Кенигсберга в 1736 г.



**Рис. 2.4**  
К задаче о мостах Кенигсберга:

*a* — упрощенная схема мостов; *b* — граф мостов.

но начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине;

- граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Граф кенигсбергских мостов имел четыре нечетные вершины (т. е. все), и следовательно, невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

Созданная Эйлером теория графов нашла очень широкое применение в транспортных и коммуникацион-

ных системах (например, для изучения самих систем, составления оптимальных маршрутов доставки грузов или маршрутизации данных в Интернете), в химии (для описания структур, путей сложных реакций), а также в электротехнике, радиотехнике и электронике (например, для представления схем, отображения топологических связей электрорадиоизделий (ЭРИ) на печатных платах или межсоединений компонентов в интегральной схеме) [13], [14].

Важный вклад в развитие теории графов внес немецкий физик Г. Р. Кирхгоф, родившийся и длительное время также проживавший в Кенигсберге. Будучи выдающимся знатоком математики, и знакомый с трудами Эйлера, в 1847 г. Кирхгоф разработал теорию деревьев для решения совместной системы линейных алгебраических уравнений, позволяющую найти значение силы тока в каждом проводнике (дуге) и в каждом контуре рассматриваемой электрической цепи. Абстрагируясь от электрических схем и цепей, которые содержат сопротивления, конденсаторы, индуктивности и т. д., он рассматривал соответствующие комбинаторные структуры, содержащие только вершины и связи (ребра или дуги), причем для связей не указывая, каким типам электрических элементов они соответствуют. Таким образом, в действительности Кирхгоф заменил каждую электрическую цепь соответствующим ей графом и показал, что для решения системы уравнений необязательно рассматривать в отдельности каждый цикл графа электрической цепи. Вместо этого он предложил простую, но эффективную методику, в соответствии с которой достаточно ограничиться только независимыми простыми циклами графа, определяемыми любым из его «остовных деревьев». В качестве примера на рисунке 2.5а–в показаны электрическая цепь, соответствующий ей граф и остовное дерево.

В настоящее время методика, предложенная Кирхгофом, является стандартной процедурой для однозначного описания схем при конструкторском проектировании с использованием ЭВМ. Различают *неориентированный*, *ориентированный* графы и граф *связи*.



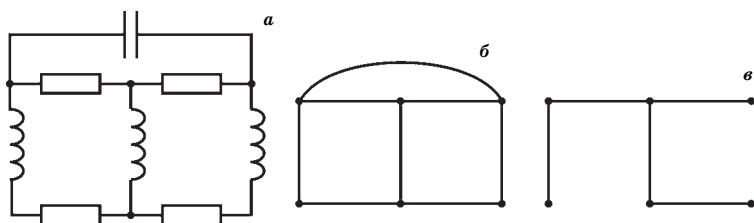


Рис. 2.5

Представление электрической цепи в виде графа:

*a* — электрическая цепь; *б* — соответствующий ей граф; *в* — остовное дерево.

Простейший неориентированный граф  $G$  определяется множеством вершин  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  и множеством ребер  $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ . Ребро  $r \in R$  характеризует связь между парой вершин  $(v_i, v_j)$ . Геометрически граф  $G = G(V, R)$  представляется в виде множества точек  $V$  и множества кривых (прямых), соединяющих вершины  $v_i, v_j \in V$ , которые находятся в некотором отношении друг к другу. Частной разновидностью неориентированного графа является граф связи.

Если связи между вершинами направлены, то мы имеем дело с ориентированными ребрами или дугами, а граф называется ориентированным или направленным графом (сокращенно орграфом) и обозначается  $\mathcal{G}(V, D)$ , где  $D$  — множество дуг.

Рассмотрим различные виды графов применительно к электрической схеме, показанной на рисунке 2.6.

### 1. Неориентированный (ненаправленный) граф.

Узлами такого графа (его вершинами) являются узлы электрической схемы, а ребрами (связями) — элементы схемы, как показано на рисунке 2.7.

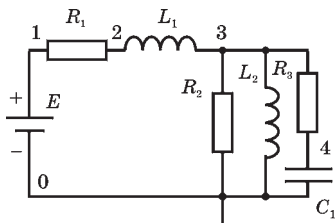


Рис. 2.6

Пример электрической схемы

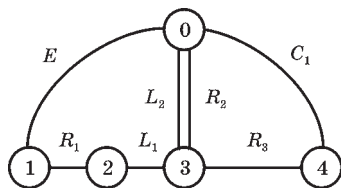


Рис. 2.7

Неориентированный граф

2. Ориентированный (направленный) граф. В различных источниках его иногда называют также топологическим графом, графом цепи или орграфом. Узлами данного графа (его вершинами) являются узлы электрической схемы, а ребрами (связями) — элементы схемы с указанием прохождения электрического сигнала (рис. 2.8).

3. Граф связи между элементами. Вершинами его являются элементы схемы, а ребрами — электрические связи между ними (рис. 2.9).

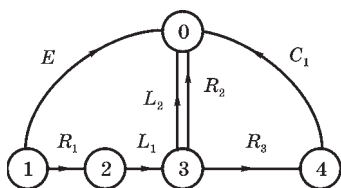


Рис. 2.8

Ориентированный граф

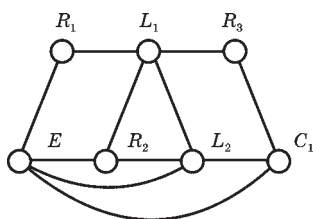


Рис. 2.9

Граф связи между элементами

Для лучшего понимания материала, касающегося теоретических и практических аспектов применения графов в математическом обеспечении САПР, дадим определения основных понятий и терминов, общепринятых в теории графов.

Вершина  $v$  инцидентна дуге  $d \in D$  (ребру  $r \in R$ ), если она является началом или концом этой дуги, а дуга  $d$  (ребро  $r$ ) инцидентна вершине  $v$ , если она входит или выходит из этой вершины. Вершины  $v_i$  и  $v_j$ , соединенные ребром или дугой, называются смежными. Смежными также называются ребра, которые имеют общую вершину. Дуга (или ребро), начинающееся и кончающееся в одной и той же вершине, называется петлей.

Подграфом  $G'(V', R')$  графа  $G(V, R)$  (или  $\mathcal{G}'(V', D')$  графа  $\mathcal{G}(V, D)$ ) называется граф с множеством вершин  $V' \subseteq V$  и множеством ребер  $R' \subseteq R$  (дуг  $D' \subseteq D$ ), каждое из которых инцидентно только вершинам из  $V'$ .

Число ребер, инцидентных вершине  $v \in V$  графа  $G(V, R)$ , называется степенью вершины и обозначается  $s(v)$ . Для орграфа  $\mathcal{G}(V, D)$  полустепень исхода  $s_H(v)$  вер-

шины  $v \in V$  называется число вершин, смежных из  $v$ , а полустепенью захода  $s_3(v)$  — число вершин, смежных к  $v$ .

Для графа  $G(V, R)$  последовательность ребер  $r_1 = (v_0, v_1)$ ,  $r_2 = (v_1, v_2)$ , ...,  $r_k = (v_{k-1}, v_k)$  называется маршрутом, соединяющим вершины  $v_0$  и  $v_k$ . Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если различны и все его вершины. Замкнутая цепь  $v_0 = v_k$  называется циклом. Граф  $G(V, R)$  связный, если любая пара его вершин соединена маршрутом. Длина маршрута (цепи) равна количеству ребер в порядке их прохождения. Длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины  $v_i$  и  $v_j$ , называется расстоянием  $\rho(v_i, v_j)$  между  $v_i$  и  $v_j$ .

Аналогично для ориентированного графа  $\mathcal{G}(V, R)$  чередующаяся последовательность вершин и дуг называется ориентированным маршрутом, маршрут замкнут, если  $v_0 = v_k$ . Путем называется маршрут, в котором все вершины различны, кроме первой и последней. Если существует путь из вершины  $v_i$  в  $v_j$ , то  $v_j$  достижима из  $v_i$ .

Орграф  $\mathcal{G}(V, D)$  называется сильно связанным (сильным), если любые его вершины взаимно достижимы, и односторонне связным, если для любых двух вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Граф  $G(V, R)$  называется деревом, если он связный и не содержит циклов, таким образом, дерево — это простейший связный граф, в нем нет кратных ребер и петель. Любое дерево с  $n$  вершинами содержит  $n - 1$  ребер. Дерево с одной выделенной вершиной называется корневым деревом. Остовным деревом (остовом) называется подграф  $G_0(V_0, R_0)$  графа  $G(V, R)$ , содержащий все вершины графа  $G$ , т. е.  $V_0 = V$  и являющийся деревом. Обобщением понятия «дерево» является понятие «лес», лесом называется произвольный граф без циклов (необязательно связный).

Для орграфа  $\mathcal{G}(V, D)$  вершина  $v_k$  называется его корнем, если любая другая вершина графа достижима из  $v_k$ . Ориентированный граф  $\mathcal{G}(V, D)$  называется ориентированным деревом, если он имеет корень и соответствующий ему неориентированный граф  $G(V, R)$  является обычным деревом. В ориентированном дереве можно выделить ориентированные поддерева.

Остовным входящим деревом со стоком в вершине  $v_c$  или остовом со стоком в  $v_c$  ориентированного графа  $\mathcal{G}(V, D)$  называется некоторый подграф  $G_{v_c}$ , обладающий следующими свойствами: а) подграф  $G_{v_c}$  содержит все вершины орграфа  $\mathcal{G}(V, D)$ ; б)  $v_c$  как вершина орграфа  $G_{v_c}$  имеет нулевую полустепень исхода ( $s_n(v)=0$ ); в) вершина  $v_c$  достижима из любой вершины  $v \neq v_c$  орграфа  $G_{v_c}$  единственным путем. Таким образом, остов  $G_{v_c}$  не содержит контуров, а каждая его вершина  $v \neq v_c$  имеет  $s_n(v)=1$ .

Необходимые иллюстрации для основных понятий графа  $G(V, R)$  и орграфа  $\mathcal{G}(V, D)$  приведены на рисунке 2.10.

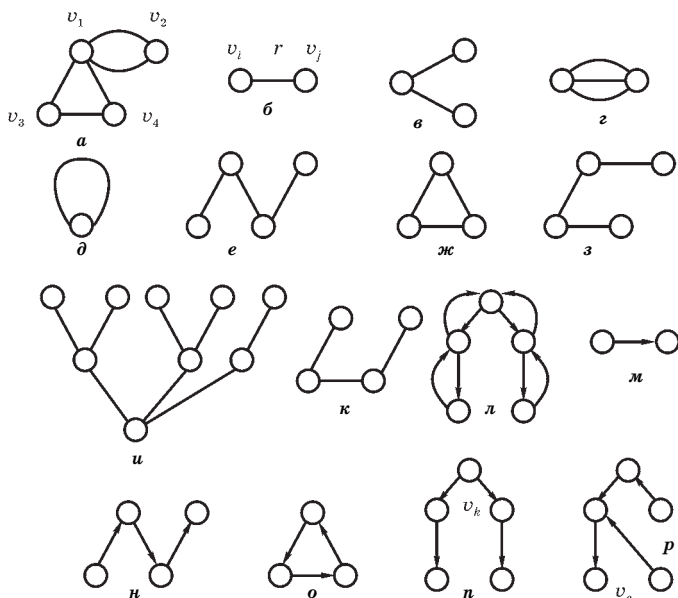


Рис. 2.10

Примеры графов:

$a$  — граф;  $b$  — ребро с граничными вершинами;  $v$  — смежные ребра;  $z$  — кратные ребра;  $d$  — петля;  $e$  — цепь;  $ж$  — цикл;  $з$  — дерево;  $и$  — корневое дерево;  $к$  — лес;  $л$  — ориентированный граф;  $м$  — дуга с началом  $v_i$  и концом  $v_j$ ;  $н$  — путь;  $о$  — контур;  $п$  — ориентированное дерево с корнем  $v_k$ ;  $р$  — остовное входящее дерево со стоком в вершине  $v_c$  орграфа  $л$ .

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какие общие требования предъявляются к математическому обеспечению САПР?
2. В чем состоят особенности математического обеспечения для различных иерархических уровней проектирования?
3. Что понимают в математике под множеством?
4. Какие виды множеств вы знаете? Приведите примеры.
5. В какие отношения между собой могут вступать два множества?
6. Какие основные операции выполняют над множествами?
7. Какие законы используются для преобразования множеств?
8. Что представляет собой кортеж?
9. Какие объекты изучает алгебра логики?
10. Какие основные логические операции используются в алгебре логики?
11. Что представляют собой и каково назначение таблиц истинности?
12. В чем заключается технический способ задания функций алгебры логики?
13. Что представляет собой граф с математической точки зрения?
14. Каковы сферы применения теории графов?
16. В чем состоит специфика применения графов в радиоэлектронике?
17. Какие основные виды графов вы знаете?
18. Что понимают под инцидентностью ребра к вершине?
19. Какие вершины называют смежными?
20. Что понимают под маршрутом, цепью и циклом?
21. В чем отличие орграфа от неориентированного графа?

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

**М**атематические модели являются важнейшей основой всего математического обеспечения САПР в целом. Проектирование ЭС связано с выполнением целого комплекса работ — системотехнического, схемотехнического, конструкторского характера. Создание современного конкурентоспособного электронного устройства требует анализа процессов, протекающих не только в самом блоке ЭС, но и в его отдельных частях, включая отдельные элементы. Конструктору приходится решать задачи, связанные с анализом электрических схем, электромагнитной и тепловой совместимостью компонентов ЭС, выполнять расчеты конструкций на механические воздействия, оценивать надежность и качество будущего изделия, причем многие из перечисленных задач связаны с поиском оптимального решения.

Применение методов и средств автоматизированного проектирования позволяет минимизировать сроки разработки нового изделия, снизить уровень брака, отказаться полностью или частично от натурных испытаний образцов, заменив их компьютерными моделями, что в целом приводит к повышению надежности и качества и снижению себестоимости разрабатываемого устройства. В настоящее время на рынке программных продуктов присутствует множество разнообразных САПР для сферы радиоэлектроники, позволяющих решать по отдельности или в комплексе все указанные выше задачи. Однако грамотное использование таких при-

кладных пакетов САПР возможно только в том случае, когда специалист-проектировщик не только понимает особенности протекающих в конструкции ЭС процессов, но и имеет представление о моделях их представления в САПР.

### **3.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ЭС**

Как уже отмечалось выше, важную роль при решении задач проектирования ЭС играют математические модели (ММ). При этом системы и их части описываются множествами математических моделей, каждая из которых характеризует определенные аспекты и свойства моделируемого объекта. Моделирование в широком смысле является основным методом исследования сложных систем и используется для принятия решений в различных сферах инженерного творчества.

Компьютерное моделирование можно рассматривать как один из самых мощных методов и инструментов познания, анализа и синтеза, которым располагают проектировщики, ответственные за разработку, производство и функционирование современных ЭС. Идея компьютерного моделирования состоит в замене реального объекта его «образом» в виде математической модели, разработке соответствующей программы для ЭВМ и проведения вычислительных экспериментов с целью получения новых знаний об объекте или решений определенной задачи. При этом у исследователя появляется возможность экспериментировать с моделью системы даже в тех случаях, когда делать это на реальном объекте практически невозможно или нецелесообразно. Работа не с самим объектом или процессом, а с его моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых возможных ситуациях [3].

Понятие математической модели не имеет строгого формального определения. Обычно под ММ объекта понимают совокупность отношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений,

которые отражают наиболее существенные свойства изучаемого объекта.

Процесс моделирования предполагает наличие объекта (системы) исследования, специалиста, перед которым поставлена конкретная задача, и модели, создаваемой для получения информации о системе и необходимой для решения поставленной задачи. В общем случае ЭС как объект моделирования можно представить кортежем символов, например

$$\text{ЭС} = \langle \text{ЦН}, \text{О}, \text{СТР}, \text{ТТХ} \rangle,$$

где ЦН — целевое назначение; О — оператор; СТР — структура; ТТХ — тактико-технические характеристики.

Целевое назначение определяет перечень задач, решение которых должно обеспечивать ЭС, например для радиолокационной станции требуется обнаружение целей, определение их координат, автоматическое сопровождение целей и др.

Оператор системы представляет собой комплекс математических отношений, устанавливающих связи между различными переменными объекта (входными, внутренними, выходными) в соответствии с используемыми принципами действия.

Под структурой понимается некоторая организация ЭС, характеризующая ее качественный и количественный состав, множество связей между компонентами и их основные свойства. Высокую значимость при проектировании имеет геометрическое размещение компонентов в заданном пространстве.

Массив тактико-технических характеристик задает количественные значения показателей, определяющих эффективность функционирования ЭС, например дальность действия, точность, показатели надежности, помехозащищенности и т. д.

Для эффективного решения задач проектирования математическая модель должна удовлетворять ряду общих требований, а также требований, отражающих специфику ЭС. К основным общим требованиям к ММ относятся полнота, точность, адекватность, экономичность, робастность и продуктивность ММ.



Полнота ММ позволяет отразить в достаточной мере именно те характеристики и особенности системы, которые интересуют нас с точки зрения поставленной цели проведения моделирования. Например, модель может достаточно полно описывать протекающие в системе процессы, но не отражать ее габаритные, массовые или стоимостные показатели.

Точность ММ дает возможность обеспечить приемлемое совпадение реальных и найденных при помощи ММ значений выходных переменных системы, составляющих вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$ . Пусть  $y_i^m$  и  $y_i^p$  — соответственно найденное при помощи ММ и реальное по результатам эксперимента значения  $i$ -й выходной переменной. Тогда относительные погрешности  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, n$  ММ при одних и тех же значениях входных переменных определяются по формуле  $\varepsilon_i = |y_i^m - y_i^p| / y_i^p$ ,  $i = 1, n$ .

В качестве скалярной оценки вектора

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T \in R^n$$

погрешности модели можно принять какую-либо его норму, например

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_i^n \varepsilon_i^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \max_{i=1, n} |\varepsilon_i|.$$

Адекватность ММ — это ее способность отображать выходные переменные системы с погрешностью не более некоторого заранее заданного значения. В общем смысле под адекватностью ММ понимают правильное качественное, структурное и достаточно точное количественное описание наиболее важных характеристик системы для данного конкретного случая.

Экономичность ММ оценивают затратами на вычислительные ресурсы (машинное время и память), необходимые для проведения вычислительного эксперимента с ММ на ЭВМ. Эти затраты зависят от числа арифметических операций при использовании модели, от размерности пространства фазовых переменных, характеризующих состояние системы и других факторов. Требования экономичности во

многих случаях противоречивы требованиям высокой точности и адекватности ММ и на практике могут быть удовлетворены лишь на основе разумного компромисса.

Робастность ММ характеризует ее устойчивость по отношению к погрешностям исходных данных, способность не допускать их чрезмерного влияния на результат вычислительного эксперимента.

Продуктивность ММ связана с возможностью предполагать достаточно достоверными исходными данными. Если исходные данные являются результатом измерений, то точность их измерения должна быть не ниже, чем для тех переменных, которые получаются при использовании ММ. В противном случае ММ считается непродуктивной и ее применение для проектирования ЭС теряет смысл.

Наряду с перечисленными требованиями ММ должна обладать следующими свойствами:

- информативности, т. е. модель должна содержать достаточно информации для решения задач проектирования;
- адаптивности, т. е. приспособленности к различным значениям входных переменных, параметров элементов, воздействий внешней среды;
- эволюции, т. е. возможности развития в процессе совершенствования проектируемой системы и др.

Специфические требования к ММ обусловлены особенностями различных классов ЭС, предназначенных для радиолокации, радиосвязи, радиоуправления, радионавигации, наведения на цель, телевидения и т. п. Главной особенностью таких ЭС является то, что большинство решаемых ими задач связано с созданием и обработкой радиосигналов, анализом их спектров, а также с использованием параметров этих сигналов — частоты, амплитуды, фазы и пр. Обработка сигналов ведется специальными методами с использованием генерирующих, приемно-усилительных и преобразующих устройств. При этом учитываются свойства сигналов, обусловленные диапазоном частот, применяемым методом модуляции, наличием амплитудных, фазовых и других искажений, а также влиянием помех и шумов. При решении задач анализа и синтеза ЭС широко используются методы спектрального анализа, опти-

мальной фильтрации, кодирования, выделения полезного сигнала на фоне шума и др. (см. § 4.3.5).

При исследовании процессов в ЭС невозможно учесть все факторы, какие-то требования являются очень существенными для моделирования, а какими-то можно и пренебречь. При этом выдвигается система допущений (гипотез), которая тщательно обосновывается и позволяет выявить и учесть при математическом описании наиболее характерные черты исследуемой системы.

На рисунке 3.1 приведена укрупненная схема, отражающая основные этапы работ при построении ММ систем. Инициацией начала работ является возникновение какой-либо проблемы, требующей использования ММ и получение задания на моделирование.

На первом этапе (рис. 3.1) производится описание проблемной области, формулируются цели и задачи, для решения которых требуются ММ. Например, такими

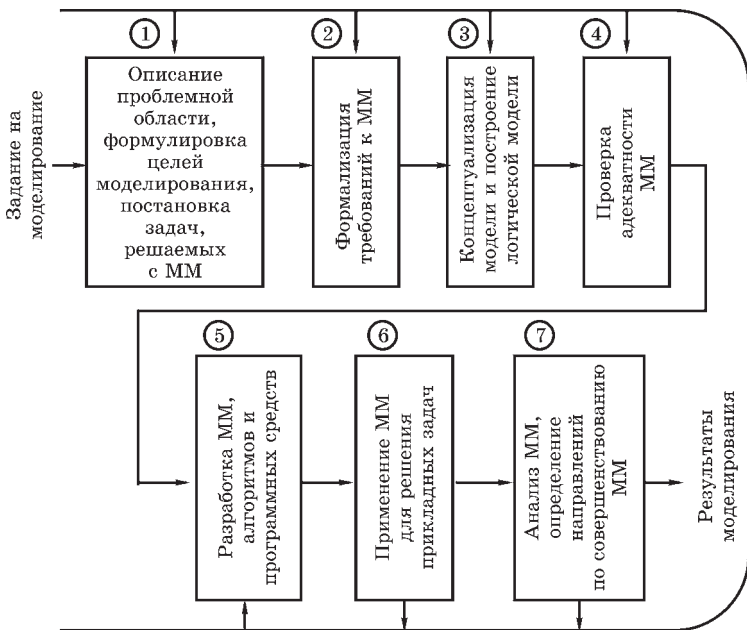


Рис. 3.1

Основные этапы построения математической модели

задачами могут быть анализ прочности конструкции ЭС, оптимизация режимов технологических процессов и т. д.

На втором этапе составляется перечень требований к ММ, по существу представляющий собой техническое задание на разрабатываемую модель. Задание должно содержать сведения о входных и выходных переменных, области их изменения, допустимые погрешности, требования к быстродействию и т. п.

На третьем этапе разрабатывается концепция модели, дается ее вербальное описание, строится схема, учитывающая логические связи между переменными, делаются предположения о методах построения модели.

Четвертый этап является самым трудоемким, поэтому его часто разбивают на несколько промежуточных этапов. Например, при использовании экспериментальных методов могут выполняться работы по планированию и проведению эксперимента, обработки результатов и др.

На пятом этапе производится проверка точности и алгоритмической надежности ММ, реализованной в виде компьютерной программы. Для этого модель тестируется во всем диапазоне изменения переменных. По результатам тестирования и сопоставления с экспериментальными данными делается вывод о пригодности модели или необходимости ее изменения, т. е. коррекции ранее выполненных этапов.

Окончательная проверка пригодности модели делается на шестом этапе путем использования полученной ММ для решения задач, сформулированных на первом этапе.

В процессе компьютерного моделирования исследователь имеет дело с тремя объектами: системой (реальной, проектируемой, воображаемой), ее математической моделью и программой для ЭВМ, реализующей алгоритм решения уравнений модели. Традиционная схема компьютерного моделирования как единого процесса построения и исследования модели, содержащая триаду «модель — алгоритм — программа», представлена на рисунке 3.2.

В ходе автоматизированного проектирования и технологической подготовки производства ЭС используется большое число разнообразных ММ, которые классифицируются по разным признакам (рис. 3.3) [3], [15].

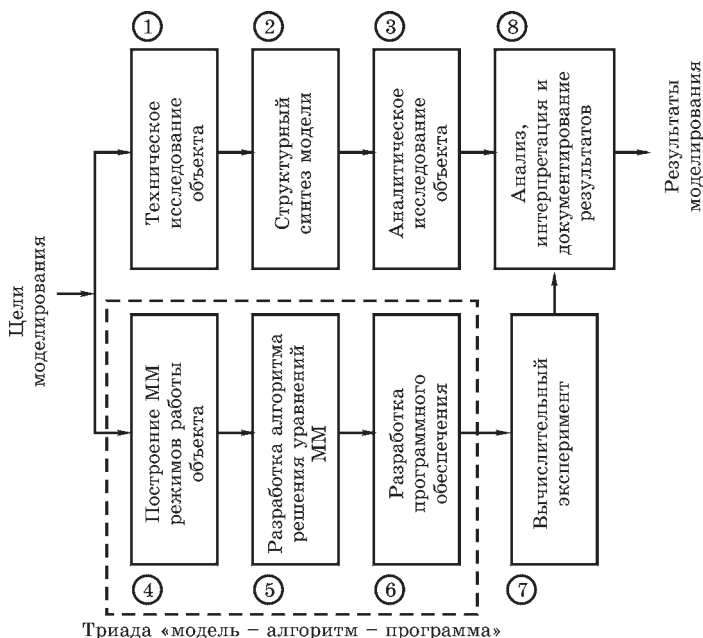


Рис. 3.2

Организация процесса компьютерного моделирования

Большинство ММ предназначены для определения значений выходных переменных исследуемого объекта — вектора  $y$  в зависимости от значений входных управляющих воздействий (вектор  $x$ ) и воздействий внешней среды (вектор  $v$ ) при задаваемых параметрах (массив  $A$ ) объекта, обычно называемых внутренними или функциональными.

Такие модели обобщенно записываются в виде

$$y = F(x, v, A) \tag{3.1}$$

или как система функций

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x, v, A); \\ y_2 &= f_2(x, v, A); \end{aligned} \tag{3.2}$$

...

$$y_n = f_n(x, v, A).$$

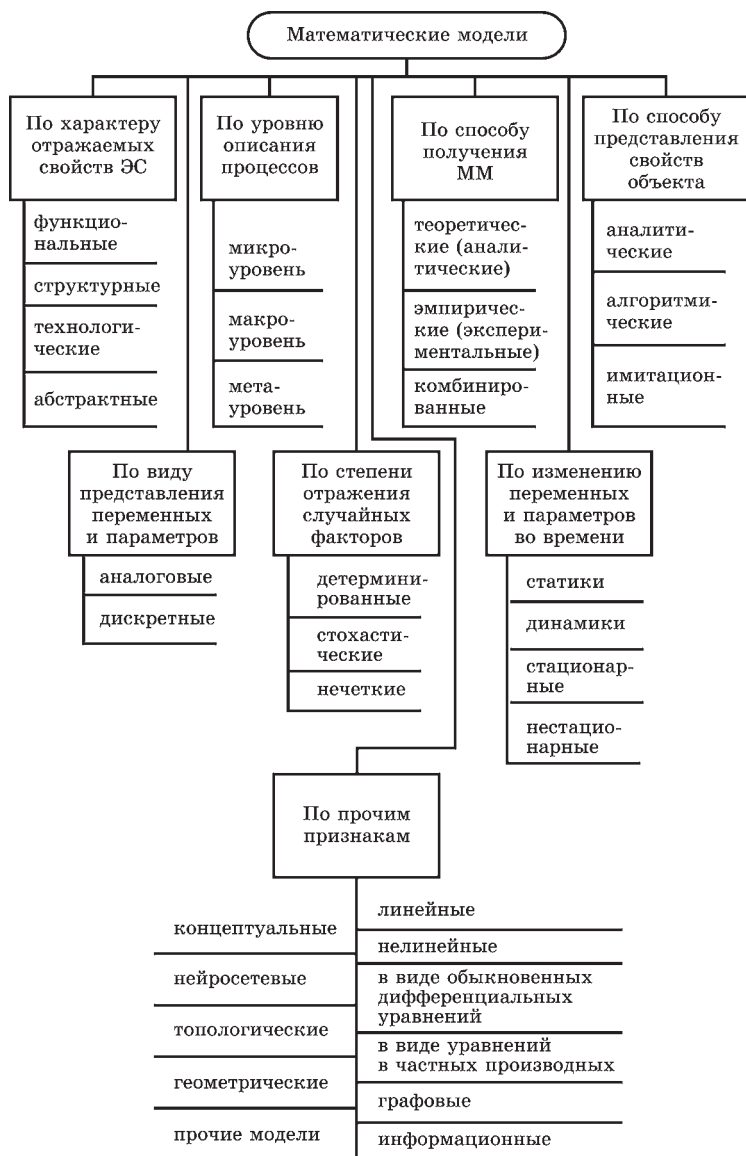


Рис. 3.3

Классификация ММ, используемых при проектировании ЭС

Функциональные модели вида (3.1), (3.2) широко используются для описания электрических, тепловых, механических и других процессов в ЭС.

В более общей форме функциональные модели имеют вид динамической системы, под которой понимается непрерывно наблюдаемая и изменяющая свое состояние под воздействием внешних и внутренних причин система, функционирующая в непрерывном времени.

Основными системными объектами данной модели являются векторы входных переменных (входа)  $x$ , фазовых координат (переменных состояния)  $z$ , выходных переменных (выхода)  $y$  такие, что

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_m; \\z &= (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2 \times \dots \times \mathcal{Z}_n; \\y &= (y_1, y_2, \dots, y_p)^T \in \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \dots \times \mathcal{Y}_p,\end{aligned}$$

где  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Y}$  — множества значений, в которых изменяются векторы  $x$ ,  $z$ ,  $y$  соответственно;  $\mathcal{X}_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $\mathcal{Z}_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ),  $\mathcal{Y}_k$  ( $k = \overline{1, p}$ ) — множества значений компонент  $x_i$ ,  $z_j$ ,  $y_k$  векторов  $x$ ,  $z$ ,  $y$ ;  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_m$  — декартово (прямое) произведение, т. е. множество  $\mathcal{X}$ , состоящее из всех упорядоченных совокупностей вида  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , причем  $x_1 \in \mathcal{X}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{X}_2$ ,  $x_m \in \mathcal{X}_m$ . Аналогичные определения имеют место и для  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{Z}$ ;  $T$  — символ транспонирования вектора.

Вектор  $z(t_0)$  фазовых координат целиком определяет состояние динамической системы в фиксированный момент времени  $t_0$ . Положение системы  $z(t)$  в любой момент времени  $t$  в будущем, т. е. для  $t > t_0$ , единственным образом определяется вектором  $z(t_0) = z_0$  и изменением входных воздействий (траекторий)  $x(\cdot) = (x(s), s \in [t_0; t])$  и не зависит от того, каким образом система пришла в состояние  $z_0$ . Для таких систем имеет место отображение

$$\varphi: T \times T \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X}(\cdot) \rightarrow \mathcal{Z}, \quad (3.3)$$

т. е. закон, по которому каждому элементу  $(t, t_0, z, x(\cdot))$  множества  $T \times T \times \mathcal{Z} \times \mathcal{X}(\cdot)$ , называемого областью определения отображения, ставится в соответствие некоторый

элемент  $z$  множества  $Z$ , называемый областью значений отображения. Здесь  $T$  — множество значений моментов времени  $t(t_0)$  и  $X(\cdot)$  — множество траекторий изменения входного воздействия  $x(\cdot)$ .

Можно использовать также более привычную форму записи  $\phi$  в виде оператора, называемого переходной функцией, т. е.

$$z(t) = \phi(t, t_0, z_0, x(\cdot)). \quad (3.4)$$

Связь между вектором переменных состояния  $z$  и контролируемым вектором выхода  $y$  задается некоторым выходным отображением  $\psi = T \times Z \rightarrow Y$ , ставящим в соответствие каждой паре  $t, z$ , называемой событием или фазой, из множества  $T \times Z$  пространства событий (фазового пространства) конкретный элемент из множества  $Y$ . Эта зависимость между  $y$  и  $z$  может быть отражена также с помощью оператора  $y(t) = \psi(t, z)$ .

Таким образом, динамическая система  $\Sigma$  задается четверкой множеств  $T, X, Z, Y$  и двумя операторами  $\phi, \psi$ , т. е.

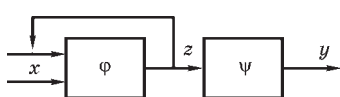


Рис. 3.4

Схема динамической системы

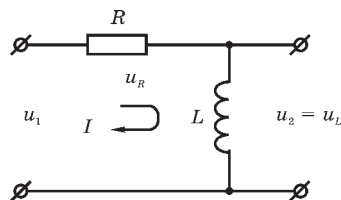


Рис. 3.5

$RL$ -цепь

$\Sigma = (T, X, Z, Y, \phi, \psi)$ , ее общая схема представлена на рисунке 3.4.

В качестве простейшего примера динамической системы рассмотрим электрическую  $RL$ -цепь (рис. 3.5), переменными в данной системе являются напряжения  $u_1, u_R, u_2 = u_L$  и ток  $I$ . Выделим вход  $x$ , выход  $y$ , фазовую координату  $z$ . Пусть  $x = u_1, y = u_2, z = I$ .

Модель динамики  $RL$ -цепи в виде обыкновенного дифференциального уравнения записывается в виде

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_L(t) = \frac{1}{L} (u_1(t) - u_R(t)) = -\frac{R}{L} I(t) + \frac{1}{L} u_1(t)$$

или с использованием обозначения системных переменных



$$\dot{z}(t) = az(t) + bx(t), \quad y(t) = cz(t),$$

где  $a = -R/L$ ,  $b = 1/L$ ,  $c = L$ .

Сопоставление решения данного дифференциального уравнения

$$z(t) = e^{a(t-t_0)}z_0 + b \int_{t_0}^t e^{a(t-s)}x(s)ds$$

с оператором  $\Phi$  в формулах (3.3) и (3.4) показывает их полное соответствие.

Наряду с функциональными моделями вида (3.1) или (3.3) при решении задач проектирования ЭС и технологии их производства также используются функциональные модели бизнес-процессов, которые строятся в соответствии со стандартом IDEF0 [16].

В процедурах конструкторского проектирования широко применяются ММ, отражающие структурные свойства объектов, в частности их геометрические формы, размеры, взаимное расположение элементов в пространстве и т. д. Такие модели называют структурными, и их обычно представляют графами.

Большое разнообразие видов ММ во многом определяется широким спектром задач, которые решаются при проектировании ЭС. К ним прежде всего относятся задачи оптимизации конструкции ЭС, оценки показателей эффективности функционирования ЭС, анализ функций чувствительности выходных показателей к изменению значений параметров элементной базы и др.

## 3.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА МИКРОУРОВНЕ

Модели, описывающие физические процессы в сплошных средах элементов и частей ЭС (поля электрического потенциала и распределение температуры в полупроводниковых кристаллах, напряженное состояние механических конструкций и т. п.), называют математическими моделями на микроуровне или распределенными моделями. В этих ММ фазовыми координатами (переменными) являются плотности токов, электрические потенциалы,

температуры, напряжения и т. д., а независимыми переменными — время и пространственные координаты. ММ на микроуровне записываются в виде интегральных или дифференциальных уравнений в частных производных, дополненных краевыми (начальными и граничными) условиями. Примерами таких уравнений являются уравнения электродинамики, теплопроводности, упругости и др. [3].

В общем виде ММ на микроуровне представляют следующим образом:

$$\Phi\left(z, u, v, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dots; s, t, A\right) = 0, \quad (3.5)$$

где  $z, u, v$  — векторы фазовых координат, управляющих и внешних воздействий соответственно;  $s$  — вектор пространственных координат;  $t$  — время;  $A$  — массив параметров;  $\Phi$  — оператор связи между переменными и их производными.

При решении задач моделирования на микроуровне ММ содержит:

- основное уравнение

$$F(z(s, t)) = f(s, t), \quad s \in D, \quad t > t_0; \quad (3.6)$$

- граничные условия

$$L(z(s, t)) = g(s, t), \quad s \in D_{\text{гп}}, \quad t > t_0; \quad (3.7)$$

- начальные условия

$$T(z(s, t)) = z(s, t_0), \quad s \in D, \quad t = t_0, \quad (3.8)$$

где  $F, L, T$  — линейные операторы основного уравнения, граничных и начальных условий соответственно;  $D, D_{\text{гп}}$  — область определения пространственных координат  $s$  и ее граница;  $t_0$  — начальный момент времени;  $f(s, t)$  — воздействия на систему;  $g(s, t)$  — функции, входящие в уравнения граничных условий.

Над векторными и скалярными переменными применительно к декартовой системе координат  $(s_1, s_2, s_3)$  выполняются следующие операции:

$$\text{grad} T = \sum_{i=1}^3 \bar{s}_i \frac{\partial T}{\partial s_i}; \quad \text{div}(\text{grad} T) = \nabla^2 T = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial s_i^2};$$

$$\text{rot } E = \bar{s}_1 \left( \frac{\partial}{\partial s_2} E_{s_3} - \frac{\partial'}{\partial s_3} E_{s_2} \right) + \bar{s}_2 \left( \frac{\partial}{\partial s_3} E_{s_1} - \frac{\partial}{\partial s_1} E_{s_3} \right) + \bar{s}_3 \left( \frac{\partial}{\partial s_1} E_{s_2} - \frac{\partial'}{\partial s_2} E_{s_1} \right) = \begin{vmatrix} \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 \\ \frac{\partial}{\partial s_1} & \frac{\partial}{\partial s_2} & \frac{\partial}{\partial s_3} \\ E_{s_1} & E_{s_2} & E_{s_3} \end{vmatrix},$$

где  $\bar{s}_i$  — вектор единичной длины, направленный вдоль положительной полуоси  $s_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Наиболее часто употребляемые уравнения ММ на микроуровне, в которых переменные  $E, H, W, J_p, J_n, G_m$  и ряд других являются векторными, приведены в таблице 3.1.

Для решения ММ на микроуровне применяются численные методы, основанные на дискретизации независимых переменных  $s, t$ . В результате дискретизации не-

Таблица 3.1

Основные уравнения ММ на микроуровне

Наименование уравнения	Запись уравнения (модели)	Обозначения переменных и параметров	Область применения
Теплопроводности	$cp \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + g;$ $\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + g / cp$	$c$ — удельная теплоемкость; $a$ — коэффициент температуропроводности; $g$ — количество теплоты, выделяемой в единицу времени в единице объема; $T$ — температура; $\lambda$ — коэффициент теплопроводности; $\rho$ — плотность; $q$ — плотность теплового потока	Моделирование тепловых режимов, температурных полей
Фурье	$q = -\lambda \text{grad } T$		
Непрерывности:		$p, n$ — композиции дырок и электронов; $J_p, J_n$ — плотности дырочного и электронного токов; $g_p, g_n$ — скорости процессов генерации рекомбинации дырок и электронов; $q$ — заряд электрона	Моделирование электрических процессов в полупроводниковых приборах
для дырок	$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \text{div } J_p + g_p$		
для электронов	$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{q} \text{div } J_n + g_n$		

Продолжение табл. 3.1

Наименование уравнения	Запись уравнения (модели)	Обозначения переменных и параметров	Область применения
Пуассона	$\operatorname{div} E = \rho / (\epsilon \epsilon_0)$	$E$ — напряженность электрического поля; $\rho$ — плотность электрического заряда; $\epsilon$ , $\epsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая постоянная соответственно	Моделирование электрических процессов в полупроводниковых приборах
Диффузии	$\frac{\partial N}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} N)$	$N$ — концентрация частиц; $D$ — коэффициент диффузии	Моделирование процессов диффузии примесей при изготовлении полупроводниковых приборов и интегральных схем
Теории упругости, Ламе	$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} W + \mu \Delta W + G_m = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$	$W$ — вектор перемещений; $G_m$ — вектор массовых сил; $\lambda$ , $\mu$ — постоянные Ламе; $\rho$ — плотность; $\Delta$ — оператор Лапласа	Моделирование напряженно-деформированных состояний механических конструкций (несущих конструкций)
Максвелла	$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}; \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \operatorname{div} \vec{B} = 0; \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu \vec{H}; \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$	$\vec{E}, \vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{D}, \vec{B}$ — электрическая и магнитная индукции; $\vec{J}$ — плотность тока проводимости; $\rho$ — плотность заряда в заданном объеме; $\epsilon$ , $\mu$ — электрическая и магнитная проницаемости среды; $\sigma$ — удельная проводимость среды	Моделирование электромагнитных полей в устройствах СВЧ, антеннах и т. д.

прерывные области изменения значений  $s$ ,  $t$  заменяются множествами значений в узловых точках, которые рассматриваются как узлы некоторой сетки. Поэтому методы решения уравнений в частных производных называют

также сеточными, наибольшее распространение среди которых получили метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ).

При использовании МКР производные в уравнениях модели заменяются конечно-разностными аналогами, для этого с учетом геометрии устройства выбирается вид и шаг сетки, выделяются внутренние и граничные узлы. В результате задача моделирования сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно потенциалов в узлах сетки.

МКЭ представляет собой комбинацию конечно-разностных и проекционных методов. Здесь используется специально построенная система носителей, в качестве которых могут быть треугольные или криволинейные образы. Благодаря этому расширяется класс решаемых задач. Часто метод МКЭ называют проекционно-сеточным, неизвестные коэффициенты (проекции) в нем определяются методом Бубнова — Галеркина [6], [15].

### 3.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА МАКРОУРОВНЕ

При моделировании на макроуровне в объекте выделяют дискретные ЭРИ и другие отдельные детали, которые в дальнейшем рассматривают в виде неделимых единиц. Фазовыми координатами (переменными) в ММ на макроуровне являются электрические напряжения, токи, температуры, расходы, силы, скорости и т. п., а в качестве непрерывной независимой переменной по сравнению с моделированием на микроуровне остается только время.

Функциональные модели на макроуровне записываются в виде систем алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели применительно к рассматриваемому объекту, входящему в состав системы, характеризуют его взаимодействие с другими элементами системы [3].

Математическая модель системы формируется из ММ элементов. При этом используются компонентные и топологические уравнения.

Компонентные уравнения связывают фазовые переменные, относящиеся к одному элементу. Для описания состояния элемента применяются фазовые переменные двух типов — потенциала  $U$  и потока  $I$ . Применительно к электрическим элементам это соответственно электрическое напряжение и ток, входящие, например, в уравнение закона Ома для резистора.

Топологические уравнения отражают способы связи между элементами в составе системы и записываются в соответствии с основными физическими законами. Эти уравнения обычно содержат однотипные фазовые переменные ( $U$  или  $I$ ), относящиеся к разным элементам системы. Например, при использовании законов Кирхгофа топологические уравнения записываются либо относительно токов ветвей, либо напряжений.

При составлении ММ системы в ней выделяют простые и сложные элементы. Состояние простого элемента описывается одним линейным уравнением, связывающим переменные  $U$  и  $I$ . Выделяют три типа простых элементов — резистивные, емкостные и индуктивные. Модели этих элементов и их условно-графические обозначения на электрических схемах приведены в таблице 3.2, а их параметры — в таблице 3.3. Данные элементы представляют собой двухполюсники. Кроме того, двухполюсниками являются независимые источники напряжения и тока, их обозначения на схемах показаны на рисунке 3.6.

Более сложные ЭРИ — транзисторы, трансформаторы и другие рассматриваются как многополюсные элементы, состоящие из совокупностей взаимосвязанных двухполюсников. Важным видом многополюсных элементов являются четырехполюсники, имеющие по четыре вывода (две пары контактов).

Для записи ММ, характеризующих динамические режимы в электрических схемах, обычно используют инвариантную форму, т. е. модель записывают в виде системы уравнений

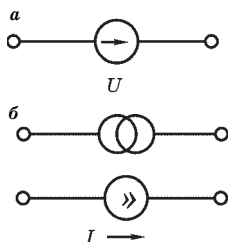


Рис. 3.6

Независимые источники:

$a$  — напряжения;  $б$  — тока.

Таблица 3.2

Модели простых элементов

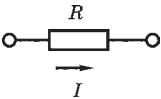
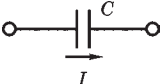
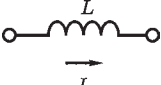
Тип элемента	Математическая модель	Условно-графическое обозначение
Резистивный	$I(t) = \frac{1}{R}U(t)$	
Емкостной	$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt};$ $U(t) = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t U(\tau) d\tau$	
Индуктивный	$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{L}U(t);$ $I(t) = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) d\tau$	

Таблица 3.3

Параметры простых элементов

Обозначение параметра элемента	Физический тип системы (цепи)		
	электрическая	тепловая	механическая
$I$	Электрический ток	Тепловой поток	Сила
$U$	Электрическое напряжение	Температура	Скорость
$R$	Электрическое сопротивление	Тепловое сопротивление	Механическое сопротивление
$C$	Электрическая емкость	Теплоемкость	Масса
$L$	Электрическая индуктивность	—	Гибкость

на общепринятом математическом языке. В общем случае система обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная на основе компонентных и топологических уравнений, записывается в виде

$$F(\dot{z}, z, x, t) = 0, \tag{3.9}$$

где  $z$  — вектор фазовых координат;  $\dot{z} = dz(t) / dt$ ;  $x$  — вектор входных воздействий.

При решении задач моделирования применяются различные формы представления модели (3.9), в том числе:

- нормальная

$$\dot{z} = \varphi(z, x; t); \quad (3.10)$$

- линеаризованная

$$\dot{z} = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}x(t); \quad (3.11)$$

- алгебраизованная и линеаризованная формы

$$M_n z_n = B_n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

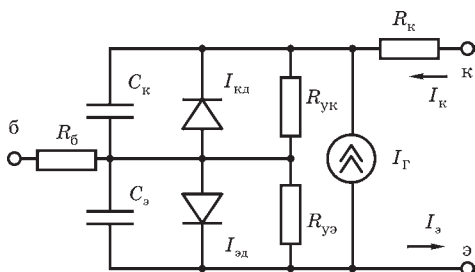
где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  — матрицы соответствующих размерностей;  $M_n$ ,  $B_n$ ,  $z_n$  — значения компонентов модели, которые имеют место в момент времени  $t = t_n$ .

Линеаризация и алгебраизация могут осуществляться как ко всем, так и к отдельным переменным, уравнениям или их частям.

Наряду с рассмотренными формами ММ широко используются схемные формы представления моделей объектов, в частности в виде эквивалентных схем и графов. Эквивалентные схемы строят на основе принципиальных электрических схем с использованием общепринятых обозначений двухполюсников и добавлением ветвей с учитываемыми паразитными параметрами. В эквивалентных схемах для отражения взаимосвязей подсистем используются различные виды связей и преобразовательные элементы. Соотношения между фазовыми переменными двух подсистем реализуются с помощью трансформаторной и гираторной связей.

Например, на рисунке 3.7 приведена эквивалентная схема биполярного транзистора, предложенная в 1954 г. американскими физиками Д. Эберсом и Д. Моллом, которая включает: четыре резистивных элемента  $R_{\text{б}}$ ,  $R_{\text{к}}$ ,  $R_{\text{уэ}}$ ,  $R_{\text{ук}}$ , представляющих собой объемные сопротивления базы, коллектора и сопротивления утечек переходов соответственно; два емкостных элемента  $C_{\text{э}}$ ,  $C_{\text{к}}$ , определяющих емкости соответствующих переходов; три источника тока переходов  $I_{\text{эд}}$ ,  $I_{\text{кд}}$ ,  $I_{\text{г}}$ , являющихся функциями  $U_{\text{сэ}}$ ,  $U_{\text{ск}}$  на емкостях [1], [3].





**Рис. 3.7**  
 Модель биполярного транзистора Эберса — Молла

Основу ММ составляют компонентные уравнения:

$$\dot{U}_{сэ} = \frac{1}{C_э}(I_э(t) - I_г(t) - I_{эд}(t)); \quad \dot{U}_{ск} = \frac{1}{C_к}(I_к(t) + I_г(t) - I_{кд}(t)).$$

Другая модель биполярного транзистора известна как модель Гуммеля — Пуна. Ее главным отличием от модели Эберса — Молла, на которой она основана, является рассмотрение процессов в активной области базы при разных уровнях инжекции (коэффициент усиления, эффект Кирка, т. е. расширение базы в область коллектора, эффект Эрли — модуляция ширины базы и другие процессы). Однако для использования модели Гуммеля — Пуна требуется больший объем исходных данных, так как число параметров в модели достигает 25. Если проектировщик не располагает такими данными, то в программах анализа, используемых на схемотехническом уровне, предусмотрен переход к использованию модели Эберса — Молла.

На рисунке 3.8 представлена эквивалентная схема МОП-транзистора, соответствующая моделям МОП-транзисторов, используемым во многих программах анализа электронных схем [1].

Эквивалентная схема характеризуется следующими параметрами:  $R_c$  — сопротивление стокового слоя;  $R_{и}$  — сопротивление истокового слоя;  $R_{п}$  — сопротивление слоя подложки;  $R_з$  — сопротивление слоя затвора;  $R_{си}$  — сопротивление «сток — исток» закрытого транзистора;  $C_{зс}$  — емкость «затвор — сток»;  $C_{зи}$  — емкость «затвор — исток»;  $C_{зп}$  — емкость «затвор — подложка»;  $C_{пс}$  — емкость «подложка — сток»;  $C_{пи}$  — емкость «подложка — исток».

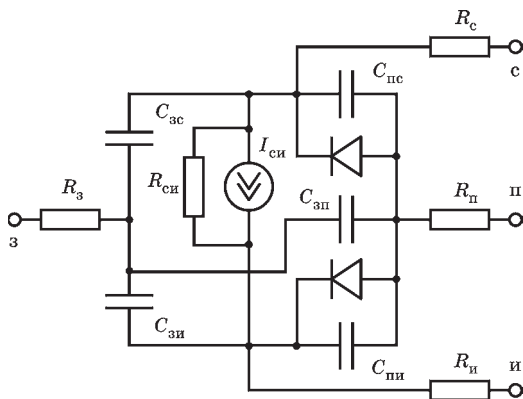


Рис. 3.8  
Модель МОП-транзистора

На основе представления эквивалентных схем ориентированными графами составляются топологические уравнения. Использование орграфов позволяет обеспечить выбор фазовых переменных и запись уравнений. Рассмотрим последовательность составления топологических уравнений на примере простой эквивалентной схемы, показанной на рисунке 3.9а [1], [3].

1. На эквивалентной схеме обозначаются участки (узлы), имеющие одинаковые электрические потенциалы, и указываются стрелками направления токов. Для рассматриваемой схемы таких участка четыре, они соответствуют множеству вершин  $\{a, b, c, d\}$  ориентированного графа (рис. 3.9б). Следует заметить, что направления токов в ветвях схемы могут выбираться произволь-

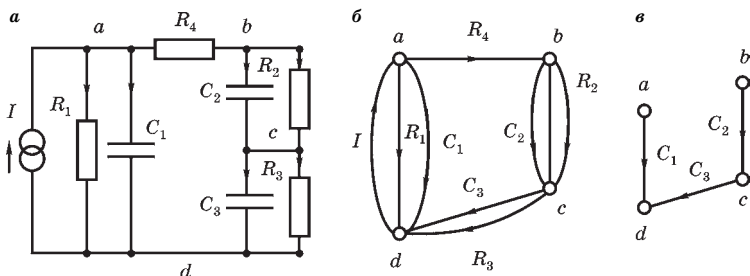


Рис. 3.9

Графовое представление эквивалентной схемы:

$a$  — эквивалентная схема;  $b$  — оргграф  $G(V, D_n)$ ;  $c$  — покрывающее дерево  $G_n(V, D_n)$ .

но, в последующем неправильно выбранные направления возможно скорректировать знаками соответствующих коэффициентов.

2. На основе сформированного множества вершин строится ориентированный граф  $G(V, D)$ , дуги  $d \in D$  которого соответствуют ветвям эквивалентной схемы. Таким образом, полученный граф (рис. 3.9б) имеет четыре вершины (множество  $V = \{a, b, c, d\}$ ) и восемь дуг (множество  $D = \{I, R_1, R_2, R_3, R_4, C_1, C_2, C_3\}$ ).

3. В графе  $G(V, D)$  выделяется покрывающее (фундаментальное, остовное) дерево  $G_n(V, D_n)$ , которое включает все вершины и  $(|V| - 1)$  дуг, соединяющих вершины таким образом, чтобы в дереве не было ни одного замкнутого контура, здесь  $|V|$  — число вершин графа  $G$  (мощность множества  $V$ ). Пример выделенного дерева с  $D_n = \{C_1, C_2, C_3\}$  показан на рисунке 3.9в. В результате множество дуг  $D$  графа  $G(V, D)$  разбивается на два подмножества — подмножество ветвей дерева  $D_{\text{вд}} = D_n$  и подмножество хорд  $D_x = D \setminus D_{\text{вд}} = \{I, R_1, R_2, R_3, R_4\}$ .

4. В соответствии с выделенным деревом записывается матрица  $\mathbf{M} = \|m_{ij}\|_{k,n}$ , число строк  $k$  матрицы равно числу хорд ( $k = |D_x|$ ), а число столбцов  $n$  — числу ветвей дерева ( $n = |D_{\text{вд}}|$ ). Элементы матрицы  $\mathbf{M}$  определяются следующим образом:  $m_{ij} = +1$ , если при подключении к дереву  $G_n$   $i$ -й хорды ( $d_i$ ) образуется контур с  $j$ -й ветвью ( $d_j$ ) и направления дуг  $d_i, d_j$  в контуре совпадают (например,  $d_i = I, d_j = C_1$ );  $m_{ij} = -1$ , если направления дуг  $d_i, d_j$  не совпадают (например,  $d_i = R_1, d_j = C_1$ );  $m_{ij} = 0$ , если хорда  $d_i$  с ветвью  $d_j$  контура не образуют (например,  $d_i = R_2, d_j = C_1$ ). Полученную матрицу  $\mathbf{M}$  называют матрицей контуров и сечений. Для рассматриваемого примера  $\mathbf{M}$ -матрица имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \begin{matrix} I \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

5. С использованием  $\mathbf{M}$ -матрицы записываются топологические уравнения для векторов напряжений и токов

$$U_x + \mathbf{M}U_{\text{вд}} = 0;$$

$$I_{\text{вд}} + \mathbf{M}^T I_x = 0,$$

где  $U_x, I_x$  — векторы напряжений и токов хорд;  $U_{\text{вд}}, I_{\text{вд}}$  — векторы напряжений и токов ветвей покрывающего дерева;  $\mathbf{M}^T$  — транспонированная матрица контуров и сечений.

ММ на макроуровне необходимы для автоматизированного решения широкого круга задач конструкторского и технологического проектирования. К этим задачам прежде всего относятся следующие [3].

1. Исследование влияния значений элементов электрической схемы на функциональные характеристики модулей, блоков и составных частей ЭС, т. е. решение задач анализа чувствительности.

2. Оценка показателей надежности проектируемой электронной аппаратуры, в том числе при эксплуатации в различных условиях. Создание систем диагностики для устранения возможных отказов.

3. Моделирование и оптимизация режимов работы узлов и блоков ЭС.

4. Настройка составных частей ЭС и систем управления их режимами.

5. Решение задач модернизации существующих ЭС с целью улучшения их тактико-технических характеристик.

Дополнительными требованиями, предъявляемыми к ММ на макроуровне по отношению к приведенным в § 3.1, следует отнести:

- высокая степень универсальности, охватывающая всю номенклатуру элементов и частей проектируемых ЭС и протекающих в них процессов;
- возможность адаптации к различным производственным и эксплуатационным условиям, т. е. должна иметься возможность вводить в модели различного рода возмущающие воздействия;
- способность к агрегированию, чтобы на основе моделей сравнительно простых элементов можно было опе-

ративно создавать модели более сложных частей ЭС и систем в целом.

Анализ проектируемых объектов с использованием ММ на макроуровне может проводиться во временной и частотной областях. Анализ во временной области используется для исследования переходных процессов, оценки динамических свойств объектов (быстродействия, максимальных отклонений от требуемых значений и т. д.) при различных входных воздействиях. Достоинством данного вида анализа является возможность его применения как для линейных, так и нелинейных систем.

Анализ в частотной области применяется при исследовании колебательных процессов в объекте, устойчивости, определении частотных характеристик, полосы пропускания и т. д. При этом анализируемые нелинейные объекты обычно линеаризуются.

### 3.3.1. Графовые модели

Как уже отмечалось в § 1.3, важными принципами конструирования ЭС являются принципы модульности и иерархичности. В соответствии с этими принципами конструкция ЭС имеет иерархическую структуру, состоящую из компонентов (модулей) разной степени сложности (рис. 3.10).

Здесь компоненты верхнего уровня представляют собой шкафы, стойки и т. п. Каждый шкаф  $\Pi_i$  состоит

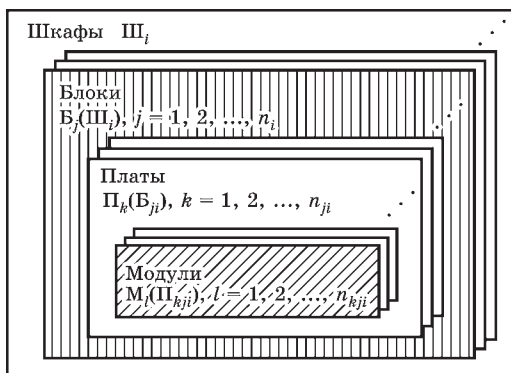


Рис. 3.10  
Иерархия  
конструктивных  
модулей

из нескольких блоков (панелей, кассет)  $B_j(\Pi_i)$ ,  $j=1, n_i$ . В свою очередь блоки содержат печатные платы  $\Pi_k(B_{ji})$ ,  $k=1, n_{ji}$ , на которых расположены модули нижнего уровня  $M_l(\Pi_{kji})$ ,  $l=1, n_{kji}$  в виде неделимых устройств (микросхем, транзисторов и других ЭРИ). Через  $n_i$ ,  $n_{ji}$ ,  $n_{kji}$  на рисунке обозначено число блоков в  $i$ -м шкафу, число плат в  $j$ -м блоке  $i$ -го шкафа и число элементов на  $k$ -й плате  $j$ -го блока  $i$ -го шкафа соответственно.

Математические модели представленных на рисунке 3.10 конструктивных модулей должны позволять автоматизированным способом решать задачи компоновки модулей, размещения модулей низших уровней в вышестоящих уровнях, трассировки соединений и получения конструкторско-технологической документации.

Достаточно подробно постановки и методы решения задач компоновки, размещения и трассировки рассматриваются в пятой главе пособия. При решении задач используются модели монтажно-коммутационного пространства и принципиальных электрических схем проектируемых ЭС. В этих моделях широко применяются математические аппараты теории графов и теории множеств [10], [11], [13], [14], основы которых даны в § 2.2 и 2.4 настоящего учебного пособия.

При решении конструкторских задач размещения и трассировки монтажно-коммутационное пространство (МКП) разбивается на дискретные (ячейки), представляющие собой элементарные площадки, в которых могут размещаться элементы, например микросхемы на печатной плате. Математически дискретное МКП обычно представляется взвешенным симметрическим графом  $G_b(V, R)$ , где множество вершин  $V$  соответствует множеству установочных площадок, а множество ребер  $R$  — множеству связей между ними. Каждое ребро  $r_{ij}$  графа характеризуется весовым коэффициентом  $c_{ij}$ , пропорциональным расстоянию между центрами установочных площадок  $v_i$  и  $v_j$ . Для определения расстояния  $l_{ij}$  на плоскости  $XOY$  коммутационного пространства между вершинами  $v_i$  и  $v_j$  с коор-

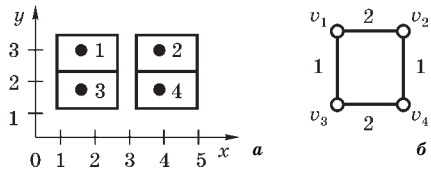
динатами  $(x_i, y_i)$  и  $(x_j, y_j)$  используется одна из следующих формул:

$$l_{ij}^0 = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|; \tag{3.13}$$

$$l_{ij}^1 = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}; \tag{3.14}$$

$$l_{ij}^k = \left| (x_i - x_j)^k \right| + \left| (y_i - y_j)^k \right|, k \geq 2. \tag{3.15}$$

Формула (3.13) применяется, когда трассы проводятся по направлениям, параллельным осям координат (ортогональная метрика). При проведении трасс по кратчайшему расстоянию на плоскости используется формула (3.14) (эвклидова метрика). Формула (3.15) используется в случае одновременной минимизации суммарной длины соединений и значений наиболее «длинных» связей. Взвешенный граф может задаваться с помощью матрицы смежности  $S_l = \|l_{ij}\|_{|V| \times |V|}$ , учитывающей длины ребер, здесь  $|V|$  — мощность множества  $V$ , т. е. число вершин графа. На рисунке 3.11 приведены фрагмент МКП и соответствующего ему взвешенного графа.

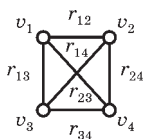


**Рис. 3.11**  
Представление МКП взвешенным графом:  
 $a$  — фрагмент МКП;  $b$  — взвешенный граф.

Матрица смежности для данного графа записывается в виде

$$S_l = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Наряду с дискретно-графовой моделью МКП, использующей ортогональную метрику, существуют и комбинированные модели, в которых допускается проведение



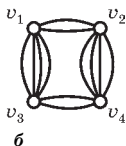
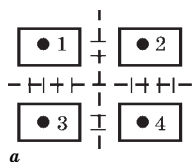
**Рис. 3.12**  
Графовая модель МКП, допускающая проведение соединений по шести направлениям

соединений из одной позиции по шести направлениям. Фрагмент такого графа показан на рисунке 3.12.

Матрица инцидентности  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{|V| \times |R|}$ , составленная для графа (см. рис. 3.12), в которой  $|R|$  — мощность множества  $R$ , т. е. число ребер, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{23} & r_{24} & r_{34} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Широкое применение для моделирования МКП находят мультиграфы  $G_m(V, R)$ , у которых пары вершин могут соединяться несколькими ребрами. Пример фрагмента МКП и соответствующего ему мультиграфа показан на рисунке 3.13. Здесь между соседними позициями в горизонтальном направлении допускается проведение двух соединений, в вертикальном — четырех.



**Рис. 3.13**  
Представление МКП взвешенным мультиграфом:  
а — фрагмент МКП; б — соответствующий ему мультиграф.

Матрица смежности  $\mathbf{S}_m$  мультиграфа, представленного на рисунке 3.13б, отражает кратности ребер и имеет вид

$$\mathbf{S}_m = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Схемы электрические принципиальные также могут быть представлены различными видами графовых моде-



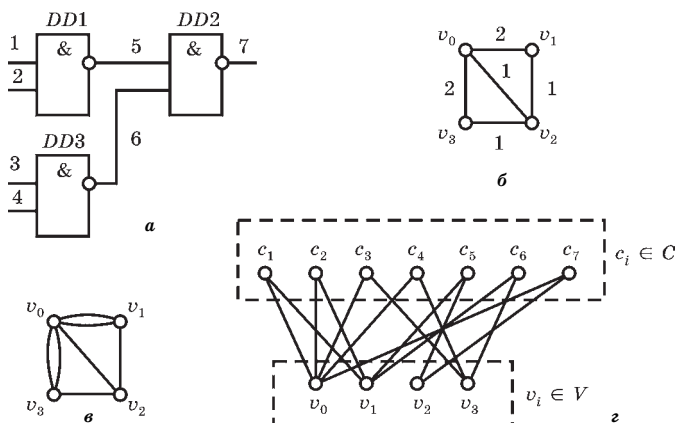


Рис. 3.14

Представление электрических схем графовой моделью:

*a* — фрагмент схемы электрической принципиальной; *б* — взвешенный граф; *в* — мультиграф; *г* — граф Кенига.

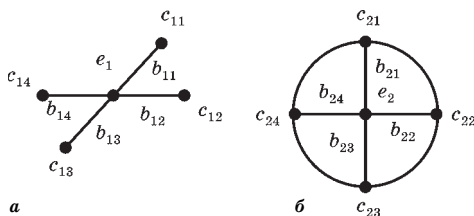
лей. На рисунке 3.14*a* показан фрагмент схемы электрической принципиальной цифрового устройства, содержащий три элемента (*DD1*, *DD2*, *DD3*), и математическое описание этой схемы с помощью взвешенного графа  $G_B(V, R)$  (рис. 3.14*б*), мультиграфа  $G_M(V, R_M)$  (рис. 3.14*в*) и графа Кенига  $G_K(V_K, R_K)$  (рис. 3.14*г*). В этих графах множество вершин  $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  содержит четыре вершины: три вершины  $v_i, i = 1, 2, 3$  соответствуют элементам схемы (*DD1*, *DD2*, *DD3*), а вершина  $v_0$  — фиктивному компоненту, объединяющему внешние контакты. Номерами на схеме обозначены связи (ребра) между вершинами.

Графы  $G_B(V, R)$  и  $G_M(V, R_M)$  задаются обычными матрицами смежности. Более полно топологические свойства устройства описывает граф Кенига  $G_K(V_K, R_K)$ , который представляет собой двудольный или бихроматический граф. Для его задания формируются два непересекающихся подмножества вершин —  $V$  и  $C$ , элементами подмножества  $C$  являются эквипотенциальные электрические соединения элементов схемы. Матрица смежности графа  $G_K$  имеет вид:

$$\mathbf{S}_K = \begin{matrix} & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

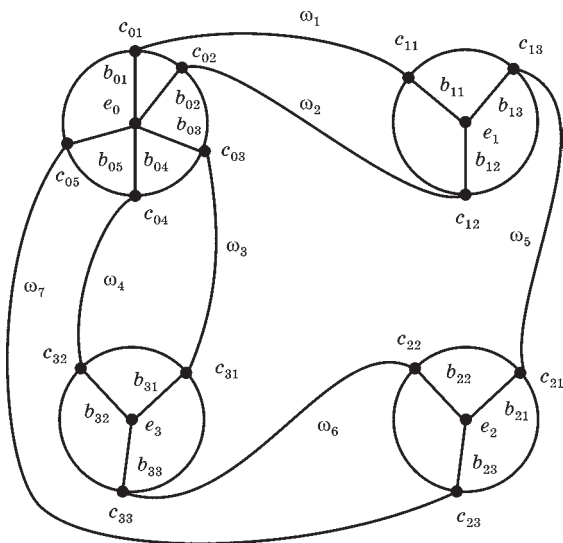
В качестве моделей отдельных компонентов электрической схемы, имеющих несколько контактов, широко используются звездные графы  $G_s(e, C, B)$ . Здесь  $e$  — вершина, характеризующая сам компонент;  $C$  — множество контактов компонента;  $B$  — множество ветвей, определяющих принадлежность контактов  $c_{ij}$  компоненту  $e$ . На рисунке 3.15 показаны примеры графов  $G_s$  для компонентов с нефиксированными (гибкими) выводами (рис. 3.15а) и компонента, для которого порядок выводов жестко фиксирован и проведение проводников между выводами недопустимо (рис. 3.15б). В последнем случае граф замкнутый, типа «колесо».

С использованием звездных графов компонентов строится графовая модель всего устройства. Пример такой модели  $G_s(V_s, R_s)$  для фрагмента схемы рисунка 3.14а показан на рисунке 3.16.



**Рис. 3.15**  
Графовые модели  
компонентов:

$a$  — с гибкими выводами;  $b$  — жестко фиксированными выводами.



**Рис. 3.16**  
Звездно-графовая модель устройства

Как видно из рисунка 3.16, множество вершин  $V_s$  графа объединяет подмножества вершин  $E = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ , соответствующих множеству конструктивных модулей схемы, с подмножествами  $C_i = \{c_{ij}\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  содержащих выходы компонентов ( $c_{ij}$  соответствует  $j$ -му выводу  $i$ -го компонента).

Таким образом,  $V_s$  определяется соотношением

$$V_s = E \cup \left( \bigcup_{i=0}^3 C_i \right).$$

Множество ветвей (ребер)  $R_s$  содержит подмножество  $W$  связей между компонентами и подмножества ветвей  $B_i = \{b_{ij}\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , соответствующих контактам компонентов схемы. В нашем случае  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7\}$ ,  $B_0 = \{b_{01}, b_{02}, \dots, b_{05}\}$  и т. д.

Модель  $G_s(V_s, R_s)$  удобно задавать с помощью двух матриц инцидентностей: матрицы  $A_E$ , определяющей отношение контактов к компонентам, и матрицы  $A_W$ , определяющей связи контактов с ветвями  $\omega \in W$ .

Число строк матрицы  $\mathbf{A}_E$  равно  $|E|$ , а число столбцов — общему числу контактов компонентов. Для графа, представленного на рисунке 3.16, матрица  $\mathbf{A}_E$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}_E = \begin{matrix} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{matrix}$$

Как видно из построенной матрицы  $\mathbf{A}_E$ , в каждом ее столбце содержится только одна единица, так как конкретный вывод  $c_{ij}$  может принадлежать только одному компоненту  $e_i$ . Число единиц в  $i$ -й строке равно числу выводов у компонента  $e_i$ .

Матрица  $\mathbf{A}_W$  имеет то же число столбцов, что и матрица  $\mathbf{A}_E$ , а число строк в ней равно  $|W|$ . В нашем случае матрица  $\mathbf{A}_W$  записывается в виде

$$\mathbf{A}_W = \begin{matrix} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{matrix}$$

Каждый столбец матрицы  $\mathbf{A}_W$  содержит одну единицу, а число единиц в строке равно числу выводов, объединяемых одной электрической цепью.

Определенным недостатком рассмотренных графовых моделей является то, что они не отражают функциональные свойства компонентов моделируемых устройств. Дальнейшим развитием моделей, использующих теорию графов, являются гиперграфовые и ультраграфовые модели [6].

### 3.3.2. Модели электрических сигналов

При проектировании ЭС часто возникает необходимость анализировать и предсказывать характеристики будущего устройства (или системы), основываясь на распределении напряжений в электрической схеме и частотном составе информационного сигнала. Это делается с помощью математического аппарата теории сигналов [17].

Электрические сигналы условно разделяют на аналоговые и цифровые. В аналоговых сигналах амплитуда изменяется непрерывно во времени без перерывов или разрывов. Цифровые сигналы — дискретные. Их величина неизменна в течение определенного периода времени, а затем скачком переходит на другой уровень. Если в сигнале возможны только два уровня, то его называют двоичным или бинарным. Важно помнить, что все двоичные сигналы являются цифровыми, но не все цифровые сигналы могут быть двоичными.

Наиболее распространенный синусоидальный аналоговый сигнал показан на рисунке 3.17, из которого видно, что мгновенные значения синусоиды изменяются непрерывно во времени между ее максимальным  $U_{\max}$  и минимальным  $U_{\min}$  значениями. Время, в течение которого амплитуда синусоиды больше среднего значения, равно времени, в течение которого ее амплитуда меньше среднего значения, т. е. длительности положительного и отрицательного полупериодов составляют  $\tau$ .

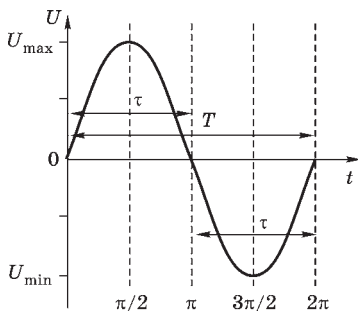


Рис. 3.17  
Синусоидальный электрический сигнал

На рисунке 3.18а показан двоичный цифровой сигнал, называемый также импульсом. Из рисунка видно, что амплитуда импульса имеет максимальное значение  $U_{\max}$  в течение времени  $\tau$ , а затем изменяется до своего минимального значения  $U_{\min}$  и удерживается в течение времени  $\tau$ . Временем, в течение которого амплитуда сигнала

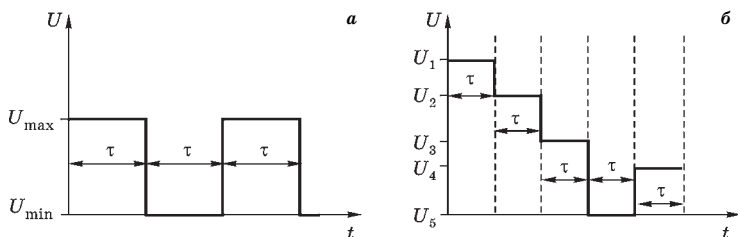


Рис. 3.18

Цифровые электрические сигналы:

а — двоичный (бинарный); б — пятиуровневый.

не равна  $U_{\max}$  или  $U_{\min}$ , является время перехода между максимальным и минимальным значениями сигнала. На рисунке 3.18б показан пятиуровневый цифровой сигнал. Здесь также напряжение остается постоянным в течение  $\tau$  секунд до тех пор, пока не изменится на одно из четырех других значений.

В сущности, электрические сигналы представляют собой изменяющиеся во времени напряжения или токи. Зависимости для одночастотного напряжения или тока могут быть представлены следующим образом:

$$U(t) = U \sin(2\pi ft + \theta) \text{ или } U(t) = U \cos(2\pi ft + \theta);$$

$$I(t) = I \sin(2\pi ft + \theta) \text{ или } I(t) = I \cos(2\pi ft + \theta),$$

где  $U(t)$ ,  $I(t)$  — изменяющиеся во времени синусоидальное (косинусоидальное) напряжение и ток соответственно;  $U$  — амплитуда сигнала, В;  $f$  — частота сигнала, Гц;  $\theta$  — фаза сигнала, рад;  $I$  — пиковое значение тока, А.

Необходимо отметить, что использование функции синуса или косинуса для представления сигнала достаточно произвольно и зависит от выбора первоначального (исходного) сигнала. Это легко понять, вспомнив, что  $\sin\theta = \cos(\theta - 90^\circ)$  или  $\cos\theta = \sin(\theta + 90^\circ)$ . Поэтому предыдущие зависимости можно записать в виде:

$$U(t) = U \sin(2\pi ft + \theta) = U \cos(2\pi ft + \theta - 90^\circ);$$

$$U(t) = U \cos(2\pi ft + \theta) = U \sin(2\pi ft + \theta + 90^\circ);$$

$$I(t) = I \sin(2\pi ft + \theta) = I \cos(2\pi ft + \theta - 90^\circ);$$

$$I(t) = I \cos(2\pi ft + \theta) = I \sin(2\pi ft + \theta + 90^\circ).$$

Все приведенные выше формулы описывают одночастотный периодический сигнал. Периодическим он назван потому, что повторяется через определенные промежутки времени. Иначе говоря, каждый следующий период сигнала будет занимать точно такой же отрезок времени и иметь такие же мгновенные значения, как и все предыдущие периоды, т. е. иметь ту же самую форму. Синусоида, косинусоида или прямоугольный сигнал — типичные примеры периодических сигналов.

Периодические сигналы могут рассматриваться во временной или в частотной области. Временным представлением, или представлением во временной области называется описание изменений сигнала во времени. Изображение на экране осциллографа представляет собой график зависимости величины сигнала от времени и обычно называется осциллограммой. Осциллограмма показывает зависимость мгновенной величины сигнала от времени, но не дает непосредственного представления о полосе частот и распределении спектра сигнала. В осциллографе вертикальное отклонение луча пропорционально амплитуде входного сигнала, а горизонтальное смещение — времени. На рисунке 3.17 показана форма одночастотного синусоидального сигнала с пиковой амплитудой  $U_{\max}$  и частотой  $f=1/T$  Гц.

Описание частотных составляющих сигнала называют представлением сигнала в частотной области. Приборы для отображения сигнала в частотной области называются анализаторами спектра. В отличие от осциллографа, анализатор спектра не дает непосредственного представления о форме конкретного сигнала. Вместо этого он показывает амплитуды различных комбинационных составляющих сигнала в зависимости от их расположения на оси частот. Это изображение называют спектром частот. В анализаторе спектра горизонтальная ось соответствует частоте, а вертикальная ось — величине составляющих сигнала. В анализаторе спектра входной сигнал, содержащий несколько составляющих с разными частотами и амплитудами, пропускается через высокочастотный полосовой фильтр (т. е. фильтр с большим отношением

центральной частоты к полосе пропускания), частота настройки которого синхронизирована с горизонтальной разверткой дисплея прибора. Каждая составляющая во входном сигнале оставляет вертикальную линию на экране (их называют спектральными составляющими), высота которой пропорциональна величине данной спектральной составляющей.

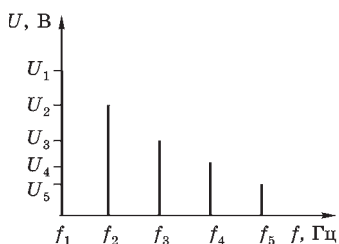


Рис. 3.19  
Частотный спектр сигнала

На рисунке 3.19 показан частотный спектр с амплитудами составляющих сигнала  $U_1-U_5$  и частотами  $f_1-f_5$  соответственно.

Как видно из рисунка 3.19, частотное представление сигнала дает информацию о распределении частот, но понять из этого графика, как изменяется форма сигнала с течением времени, практически невозможно. Иначе говоря, частотные спектры отражают зависимость величины напряжения, тока или мощности от частоты, выраженную в абсолютных или относительных единицах (дБ, дБм и т. п.).

Иначе говоря, частотные спектры отражают зависимость величины напряжения, тока или мощности от частоты, выраженную в абсолютных или относительных единицах (дБ, дБм и т. п.).

Моделирование сигналов в частотной области тесно связано с понятием ширины полосы сигнала, под которой подразумевается диапазон частот всех частотных составляющих, присутствующих в спектре информационного сигнала. В этом случае ширина полосы определяется как разность между самой высокой и самой низкой частотами спектра. Так, ширина полосы сигнала, показанного на рисунке 3.19, при  $f_1=2000$  Гц,  $f_5=18\,000$  Гц составляет 16 000 Гц, т. е.  $f_5 - f_1 = 18\,000 - 2000 = 16\,000$  Гц.

Если говорят о ширине полосы канала связи, то подразумевают разность между самой высокой и самой низкой частотами, которые возможно передать по конкретному каналу. Ширина полосы канала связи должна быть достаточно большой для того, чтобы пропустить все достаточно важные информационные частоты. Например, человеческий голос содержит частотные составляющие в диа-



пазоне приблизительно от 100 Гц до 8 кГц, хотя основная часть энергии сосредоточена в полосе от 400 до 600 Гц. Поэтому в соответствии с рекомендациями Международного союза электросвязи стандартные европейские телефонные линии имеют полосу пропускания в диапазоне от 300 до 3400 Гц, что соответствует ширине полосы канала связи 3100 Гц и позволяет с достаточной разборчивостью передавать (и принимать) сигналы речевых сообщений. Заметим, что в США полоса пропускания телефонных линий отличается от европейских стандартов и составляет 300–3000 Гц, что составляет ширину полосы канала связи 2700 Гц [17].

Все каналы связи имеют ограниченную ширину полосы пропускания и, следовательно, накладывают ограничения на распространяющиеся по ним сигналы. При моделировании прохождения сигнала по каналу связи полагают, что канал связи эквивалентен идеальному фильтру с конечной шириной полосы пропускания. Если несинусоидальный периодически повторяющийся сигнал пропустить сквозь идеальный фильтр нижних частот, то составляющие сигнала, имеющие более высокие частоты, чем частота среза фильтра, будут удалены. Следовательно, и частотный состав, и форма сигнала изменятся.

На рисунке 3.20а показана форма прямоугольного импульса, спектр которого приведен на рисунке 3.19, а значения  $f_1, f_2, f_3, f_4$  и  $f_5$  составляют 2, 6, 10, 14 и 18 кГц соответственно. Если этот сигнал пропустить через фильтр нижних частот с верхней частотой среза 17 кГц, то составляющие сигнала с частотой, превышающей частоту среза, будут подавлены и сигнал примет форму, показанную на рисунке 3.20б. На рисунке 3.20в–д представлены формы сигналов для случаев, когда фильтры нижних частот имеют частоты среза, равные соответственно 13, 9 и 5 кГц.

Рисунок 3.20 наглядно иллюстрирует, как ограничение полосы частот изменяет и форму сигнала, и его частотный состав. При некоторой частоте ограничения сигнал будет содержать только одну гармоническую составляющую — основную частоту. Следовательно, ограничение полосы частот снижает информационную емкость системы связи,

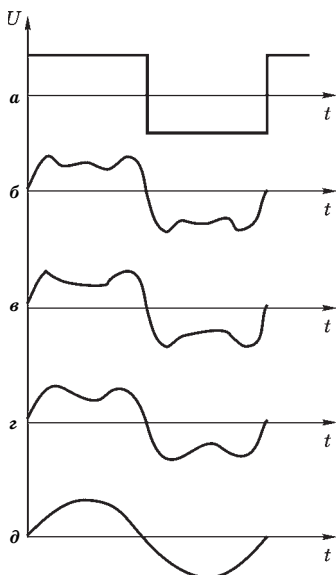


Рис. 3.20

Ограничение полосы частот сигнала:

*a* — исходный прямоугольный сигнал с основной частотой 2 кГц; *б* — форма сигнала при ограничении полосы частот до 17 кГц; *в* — форма сигнала при ограничении полосы частот до 13 кГц; *г* — форма сигнала при ограничении полосы частот до 9 кГц; *д* — форма сигнала при ограничении полосы частот до 5 кГц.

а при слишком сильном ограничении часть информационного сигнала может быть потеряна.

Важную роль в радиоэлектронике играет процесс объединения (смешивания) двух и более сигналов. Различают два способа объединения сигналов — линейный и нелинейный. Линейное сложение сигналов происходит, когда несколько сигналов объединяются в линейном устройстве, в качестве которого может рассматриваться пассивная цепь или мало-сигнальный усилитель. Сигналы объединяются таким образом, что модель объединенного сигнала представляет собой алгебраическую сумму мгновенных значений слагаемых сигналов. Иногда линейное смешивание также называют микшированием сигналов.

На рисунке 3.21*a* показан процесс усиления одночастотного сигнала линейным усилителем. Рисунок 3.21*б* дает временное представление выходного сигнала, а рисунок 3.21*в* — частотное. Модель выходного сигнала имеет вид

$$U_{\text{вых}} = kU_{\text{вх}} \sin 2\pi f_1 t,$$

где  $k$  — коэффициент усиления;  $U_{\text{вх}}$  — амплитуда входного сигнала;  $f_1$  — частота сигнала.

На рисунке 3.22*a* показаны два разночастотных сигнала, объединяющихся в линейном усилителе, причем каждый входной сигнал усиливается в  $k$  раз. В результате смещения на выходе усилителя формируется сигнал, рав-

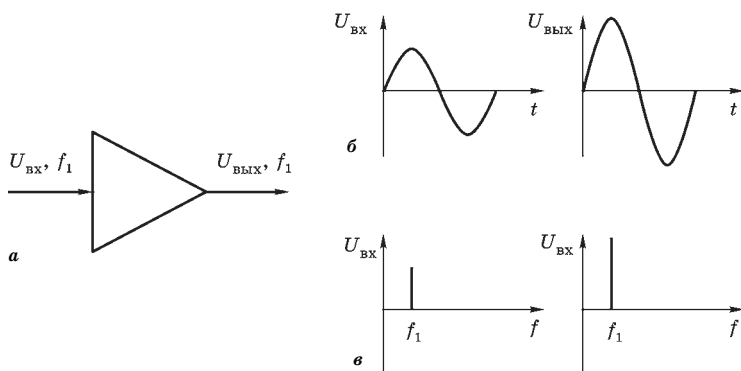


Рис. 3.21

Линейное усиление одночастотного сигнала:

*a* — линейный усилитель; *б* — временное представление сигнала; *в* — частотное представление сигнала.

ный алгебраической сумме мгновенных значений входных сигналов:

$$U_{\text{ВЫХ}} = k(U_{\text{ВХ1}} \sin 2\pi f_1 t + U_{\text{ВХ2}} \sin 2\pi f_2 t),$$

где  $k$  — коэффициент усиления;  $U_{\text{ВХ1}}$ ,  $U_{\text{ВХ2}}$  — амплитуды входных сигналов;  $f_1$ ,  $f_2$  — частоты первого и второго сигналов соответственно.

На рисунке 3.22*б* показано частотное представление суммы сигналов  $U_{\text{ВХ1}}$  и  $U_{\text{ВХ2}}$ , а на рисунке 3.22*в* — их форма.

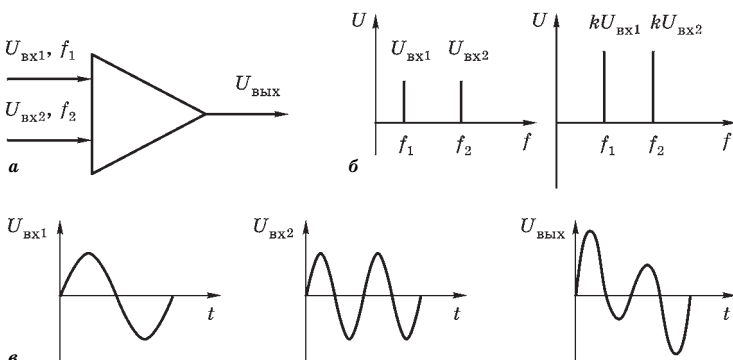


Рис. 3.22

Линейное сложение разночастотных сигналов:

*a* — линейный усилитель; *б* — частотное представление сигналов; *в* — временное представление сигнала.

Нелинейное смешивание происходит, когда несколько сигналов объединяются в нелинейном устройстве типа диодного смесителя или нелинейного усилителя. При нелинейном смешивании входные сигналы, объединяясь, производят дополнительные частотные составляющие.

На рисунке 3.23а показан процесс усиления одночастотного входного сигнала нелинейным усилителем. Выходной сигнал такого усилителя, помимо основной частоты, содержит в своем спектре и дополнительные частотные составляющие. Модель выходного сигнала представляют степенным рядом вида

$$U_{\text{ВЫХ}} = k_1(U_{\text{ВХ}} \sin 2\pi f_1 t) + k_2(U_{\text{ВХ}} \sin 2\pi f_1 t)^2 + k_3(U_{\text{ВХ}} \sin 2\pi f_1 t)^3 + \dots + k_n(U_{\text{ВХ}} \sin 2\pi f_1 t)^n,$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_n$  — коэффициенты усиления по основной частоте, по второй, третьей и  $n$ -й гармонической составляющей сигнала соответственно;  $U_{\text{ВХ}}$  — амплитуда входного сигнала;  $f_1$  — его частота.

Благодаря члену степенного ряда  $U_{\text{ВХ}}^n$  в выходном сигнале появляются частоты,  $n$ -кратные основной частоте  $f_1$ . Например, член  $k_2 U_{\text{ВХ}}^2$  создает частоту, равную  $2f_1$ ,  $k_3 U_{\text{ВХ}}^3$  — частоту, равную  $3f_1$ , и т. д. На рисунке 3.23б

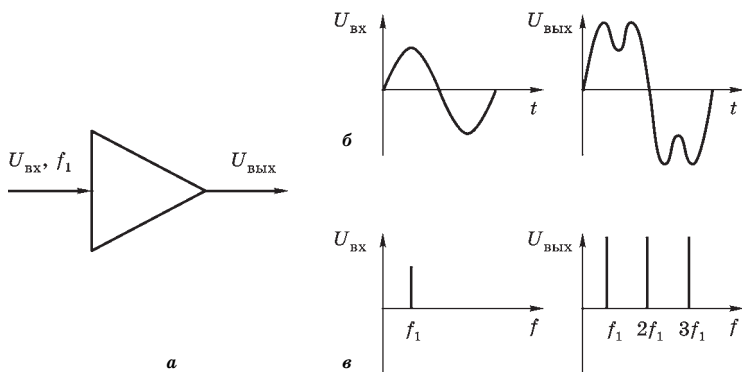


Рис. 3.23

Нелинейное усиление одночастотного сигнала:

а — нелинейный усилитель; б — временное представление сигнала; в — частотное представление сигнала.

показана форма выходного сигнала нелинейного усилителя при одночастотном сигнале на его входе. На рисунке 3.23в приведен спектр выходного сигнала. Отметим, что гармонические составляющие расположены на одинаковом расстоянии друг от друга, равном основной частоте  $f_1$ .

Нелинейное усиление одной частоты создает только кратные частоты или гармонические составляющие этой частоты. Если гармоника нежелательна, то ее относят к нелинейным искажениям. В том случае когда образование гармоник необходимо, этот процесс называют умножением частоты.

Если в качестве нелинейного устройства используется полевой транзистор, то его передаточная характеристика может быть аппроксимирована квадратичным выражением. При этом модель сигнала на выходе такого усилителя имеет следующий вид:

$$U_{\text{ВЫХ}} = k_2 U_{\text{ВХ}}^2.$$

При подаче на вход такого устройства одночастотного входного сигнала на его выходе присутствуют постоянная составляющая и вторая гармоника, причем более высокие гармоники отсутствуют. Таким образом, полевые транзисторы вносят меньшие нелинейные искажения, чем биполярные.

Часто при проектировании ЭС возникает необходимость провести моделирование нелинейного усиления многочастотного сигнала. Например, в случае усиления двухчастотного сигнала нелинейным усилителем модель для выходного сигнала примет вид

$$U_{\text{ВЫХ}} = k_1(U_{\text{ВХ1}} \sin 2\pi f_1 t + U_{\text{ВХ2}} \sin 2\pi f_2 t) + \\ + k_2(U_{\text{ВХ1}} \sin 2\pi f_1 t + U_{\text{ВХ2}} \sin 2\pi f_2 t)^2 + k_3(U_{\text{ВХ1}} \sin 2\pi f_1 t + \\ + U_{\text{ВХ2}} \sin 2\pi f_2 t)^3 + \dots + k_n(U_{\text{ВХ1}} \sin 2\pi f_1 t + U_{\text{ВХ2}} \sin 2\pi f_2 t)^n,$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_n$  — коэффициенты усиления по основной частоте, по второй, третьей и  $n$ -й гармонической составляющей сигнала соответственно;  $U_{\text{ВХ1}}, U_{\text{ВХ2}}$  — амплитуды входных сигналов;  $f_1, f_2$  — их частоты.

### 3.3.3. Модели аналоговых устройств

При схемотехническом проектировании ЭС часто возникает потребность компьютерного моделирования какого-либо функционального узла аппаратуры, чтобы провести анализ работы схемы с целью исключить возможные ошибки еще на ранних этапах проектных работ. Разработка аналоговых устройств является одной из наиболее сложных и ответственных схемотехнических задач, так как аналоговая аппаратура имеет ряд следующих специфических особенностей:

- аналоговые ЭС могут работать в широком диапазоне частот и использовать различные формы сигнала и виды его модуляции;
- функциональные характеристики аналоговой аппаратуры, в отличие от цифровой, наиболее сильно зависят от выбранных схемотехнических решений, а также от состава элементной базы;
- аналоговые устройства очень чувствительны к электромагнитным полям, как внешним по отношению к устройству, так и внутренним, возникающим в течение времени его работы;
- рабочие характеристики аналоговых ЭС сильно зависят от температурных режимов;
- электронные компоненты в составе аппаратуры при работе оказывают друг на друга электромагнитное и (или) тепловое воздействия, что отражается на выходных характеристиках аппаратуры (так называемая проблема тепловой и электромагнитной совместимости компонентов);
- аналоговым устройствам свойственно со временем изменять свои характеристики, что обусловлено старением элементной базы, т. е. изменением со временем физико-химических свойств материалов, использованных для изготовления электронных компонентов (для цифровых ЭС проблемы, связанные со старением элементной базы, менее выражены из-за специфики цифровой обработки сигналов).

Схемотехническое проектирование основано на использовании ЭРИ, сгруппированных по назначению

в простейшие функциональные блоки, среди которых можно выделить такие, как колебательный контур, генератор, усилитель, интегратор, компаратор, дифференциатор, сумматор, повторитель, аттенюатор и многие другие элементарные устройства.

Математическая модель всего объекта проектирования строится на основе объединения моделей отдельных функциональных блоков, входящих в его состав. Следовательно, для того чтобы составить математическое описание аналогового устройства в целом, необходимо иметь модели его составных частей. Рассмотрим построение математических моделей для некоторых базовых функциональных узлов.

Колебательные системы играют важную роль в работе радиопередающих и радиоприемных устройств, а также в измерительных и специальных схемах. Одним из наиболее простых видов колебательных систем является замкнутый колебательный  $LC$ -контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора (рис. 3.24).

Если в некоторый момент времени контурный конденсатор зарядить от постороннего источника постоянного тока, то конденсатор начнет разряжаться через катушку. Результирующий ток в цепи будет возрастать, а энергия из конденсатора будет переходить в катушку до полного разряда конденсатора. Затем конденсатор начнет перезаряжаться до тех пор, пока магнитная энергия катушки не перейдет в электрическую энергию конденсатора. В результате в контуре возникнут свободные (собственные) колебания. С физической точки зрения эти колебания представляют собой повторяющийся обмен энергией между катушкой и конденсатором, так что полная энергия системы составит

$$W(t) = W_{\text{э}}(t) + W_{\text{м}}(t),$$

где  $W_{\text{э}}(t)$  и  $W_{\text{м}}(t)$  — электрическая энергия конденсатора и магнитная энергия катушки в момент времени  $t$ .

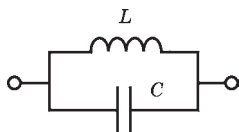


Рис. 3.24  
Параллельный  
колебательный  
контур

Резонансная частота и период собственных колебаний контура определяются по формулам Томпсона:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC},$$

где  $f_0$  — резонансная частота, Гц;  $L$  — индуктивность контурной катушки, Гн;  $C$  — емкость конденсатора, Ф;  $T_0$  — период собственных колебаний контура, с.

Свободные колебания в контуре являются затухающими, причем скорость убывания амплитуды колебательного тока зависит от величины активного сопротивления контура и происходит по экспоненциальному закону. Время  $\tau$ , в течение которого максимальная амплитуда тока в контуре уменьшается до величины  $I_{\max}/100$ , называется длительностью собственных затухающих колебаний. Тогда число полных колебаний составит  $N = \tau/T_0$ .

При подключении к контуру внешнего генератора сигнала в контуре возникнет переменный ток с частотой, равной частоте генератора, т. е. в контуре возникнут вынужденные колебания тока. Кроме того, возникнут и свободные колебания. Если их частота не совпадает с частотой вынужденных колебаний, то свободные колебания быстро затухают и в контуре устанавливаются только вынужденные колебания. Однако если частоты свободных и вынужденных колебаний совпадут, возникнет явление резонанса и амплитуда тока в реактивных ветвях контура в несколько раз превысит амплитуду тока, подводимого к контуру от генератора.

Часто колебательный контур рассматривают как двухполюсник, представляющий собой параллельное включение конденсатора и катушки индуктивности. Комплексное сопротивление такого двухполюсника можно записать как

$$\hat{z}(j\omega) = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

Резонансная частота такого двухполюсника определяется по формуле  $\omega_h = 1/\sqrt{LC}$  и совпадает по значению с собственной частотой колебательного контура. Следовательно, на одной и той же частоте может работать множе-



ство контуров с разными величинами  $L$  и  $C$ , но с одинаковым произведением  $LC$ .

Для работы систем радиосвязи, функционирования измерительной, бытовой и другой электронной техники часто возникает потребность в стабильных периодических сигналах различной формы. Примерами схем, построенных на основе  $LC$ -колебательного контура, служат схемы генераторов Колпица, Хартли и Клаппа [17].

Генератором называется устройство, создающее периодически повторяющиеся колебания. Генератор преобразует входное напряжение постоянного тока в выходное напряжение переменного тока, причем выходной сигнал может быть синусоидальным, прямоугольным, пилообразным или любым другим периодическим.

По своей сути генератор представляет собой усилитель, охваченный положительной обратной связью, т. е. передачей энергии от выхода усилителя к его входу. Положительной такая обратная связь названа потому, что напряжение ее сигнала совпадает по фазе с напряжением сигнала в той цепи, куда вводится обратная связь, помогая процессу колебаний, и не обязательно указывает на положительную или отрицательную полярность сигнала. Как только генератор с обратной связью входит в режим устойчивой генерации сигнала переменного тока, часть этого сигнала отводится обратно на вход, где усиливается. Усиленный входной сигнал появляется на выходе схемы, после чего весь процесс повторяется, т. е. состояние выхода устройства зависит от его входного состояния.

Генератор должен содержать частотно-задающую схему, которая может состоять из резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности или кварцевых резонаторов, с помощью которых устанавливаются и изменяются значения рабочей частоты схемы.

Таким образом, для работы электронного генератора необходимо выполнение четырех условий: наличие усиления, положительной обратной связи, частотно-задающей схемы и источника электрической энергии постоянного тока.

На рисунке 3.25 приведена структурная модель генератора с обратной связью.

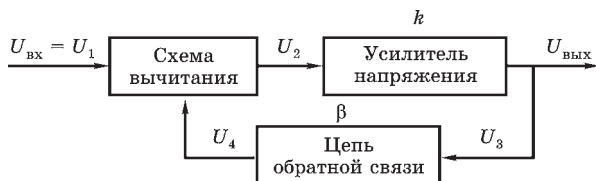


Рис. 3.25  
Структурная модель генератора с обратной связью

Генератор с обратной связью представляет собой схему замкнутого типа, которая включает в себя усилитель напряжения с коэффициентом усиления при разомкнутой петле обратной связи, равным  $k$ , частотно-задающую цепь обратной связи с коэффициентом передачи  $\beta$  и схему вычитания.

По данным рисунка 3.25 можно составить следующие соотношения:

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{U_3}{U_1}; \quad U_2 = U_1 - U_4; \quad k = \frac{U_3}{U_2}; \quad \beta = \frac{U_3}{U_2},$$

где  $U_1$  — внешнее входное напряжение;  $U_2$  — напряжение на входе усилителя;  $U_3$  — выходное напряжение;  $U_4$  — напряжение обратной связи;  $k$  — усиление по напряжению с незамкнутой петлей обратной связи;  $\beta$  — коэффициент передачи цепи обратной связи.

Исключая  $U_4$ , получим:  $U_2 = U_1 - \beta U_3$ . Таким образом,  $U_3 = k(U_1 - \beta U_3)$ . Раскладывая на множители, находим:  $U_3 + k\beta U_3 = kU_1$ . Следовательно, коэффициент усиления  $k_{\text{ос}}$  усилителя с обратной связью составит

$$k_{\text{ос}} = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{U_3}{U_1} = \frac{k}{1 + k\beta}. \quad (3.16)$$

Необходимо отметить, что формула (3.16) является стандартной и используется для расчета коэффициента усиления усилителя с обратной связью. Если на какой-либо частоте  $k\beta$  стремится к  $-1$ , то знаменатель приближается к нулю, а  $U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$  — к бесконечности. В этом случае в схеме возникают колебания и внешний сигнал перестает быть необходимым.

Таким образом, для возникновения автоколебаний схема должна удовлетворять четырем основным требо-

ваниям, сформулированным ранее, а также удовлетворять (3.16) и соответствовать модели петли обратной связи, показанной на рисунке 3.25.

Для возбуждения колебаний наиболее часто в схемах генераторов используются *RC* фазосдвигающие цепочки (генератор на мосте Вина), резонансные *LC*-контуры (генераторы Хартли, Колпица и Клаппа) или кварцевые резонаторы (генератор Пирса) [17]. Тип колебательной системы, используемой в каждом конкретном случае, зависит от следующих критериев:

- требуемая рабочая частота и ее стабильность;
- необходимость в генерации сигнала фиксированной частоты или набора сигналов разных частот;
- требования к искажениям или ограничению сигнала;
- требуемая точность;
- необходимая выходная мощность;
- габариты и масса;
- область применения (цифровая или аналоговая система);
- стоимость;
- надежность и долговечность.

Часто при схемотехническом проектировании возникает необходимость в ограничении спектра сигнала или выделения сигнала в пределах ограниченной полосы частот. В таких ситуациях специалисту-разработчику необходимо выбрать тип того или иного фильтра, рассчитать его параметры и промоделировать его работу.

Каждый фильтр характеризуется так называемой частотой среза, при которой мощность сигнала на выходе фильтра снижается на 50% по сравнению с мощностью входного сигнала, поэтому фильтры принято классифицировать по пропусканию сигнала относительно частоты среза. Выделяют следующие виды фильтров:

- фильтр низких частот, имеющий нулевой коэффициент передачи сигнала на частотах выше частоты среза;
- фильтр высоких частот, не пропускающий сигналы с частотой ниже, чем частота среза.

Иногда требуется выделить из спектра сигналы определенных частот, чтобы пропустить их для дальнейшей

обработки или, наоборот, отсеять их как не представляющие интереса, или вредные (например, электромагнитные помехи). Фильтры, позволяющие реализовать прохождение (отсечку) сигналов, заключенных в интервале между нижней  $f_1$  и верхней  $f_2$  частотами, получили название полосовых. Таким образом, ширина полосы пропускания полосовых фильтров определяется разностью  $f_2 - f_1$ .

При математическом моделировании фильтр удобно представлять в виде «черного ящика», поведение которого определяется операторной передаточной функцией  $H(p)$ , представляющей собой отношение изображений по Лапласу выходного и входного сигналов. Передаточная характеристика аналогового фильтра может быть получена при помощи преобразования Лапласа от импульсной характеристики фильтра и записана в виде

$$H(p) = L[h(t)] = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt,$$

где  $L$  — оператор преобразования Лапласа;  $h(t)$  — импульсная характеристика фильтра.

Необходимо отметить, что нижний предел интегрирования равен нулю, поскольку  $h(t) = 0$  для всех  $t < 0$ , а это означает, что реакция фильтра на гармоническое воздействие не может возникнуть раньше самого воздействия (условие физической реализуемости фильтра).

Передаточную характеристику фильтра можно представить дробно-рациональной функцией

$$H(p) = \frac{\sum_{n=0}^N b_n p^n}{\sum_{m=0}^M a_m p^m}, \quad (3.17)$$

где  $p = j\omega$  — комплексная переменная;  $a_m, b_n$  — действительные коэффициенты фильтра.

Из (3.17) видно, что передаточная функция представляет собой отношение двух полиномов от комплексной переменной  $p$ , в котором корни полинома числителя называ-

ют нулями, а корни полинома знаменателя — полюсами. Заметим, что нулями передаточной функции называются такие комплексные числа, при которых числитель передаточной функции обращается в ноль и соответственно сама  $H(p) \rightarrow 0$ , а полюсами передаточной функции являются такие комплексные числа, при которых знаменатель передаточной функции становится равным нулю, а сама  $H(p) \rightarrow \infty$ . Тогда передаточную функцию (3.17) можно переписать через нули и полюса в виде

$$H(p) = \frac{\prod_{n=0}^N (p - p_n)}{\prod_{m=0}^M (p - p_m)}.$$

Следовательно, передаточная функция задается своими нулями и полюсами на комплексной плоскости. Расположение полюсов и нулей  $H(p)$  на комплексной плоскости определяет поведение фильтра как в частотной, так и во временной областях. В частности, от расположения полюсов и нулей зависит форма частотных характеристик фильтра. Обычно нули передачи частотно-селективных фильтров располагают на мнимой оси, включая начало координат и бесконечность. В простейших случаях нули передачи расположены в начале координат (высокочастотный фильтр) или в бесконечности (низкочастотный фильтр). Такие фильтры имеют меньшую селективность, чем фильтры с нулями передачи на мнимой оси. Однако уменьшение селективности окупается значительным упрощением структуры линейной частотно-селективной цепи, реализующей передаточную функцию с нулями в начале координат или бесконечности.

Получение передаточной функции, обеспечивающей заданную форму частотных характеристик, основано на использовании оптимизационных методов. На практике часто используют типовые передаточные функции, имеющие аналитическое решение и аппроксимирующие амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтров частот. К фильтрам, построенным на основе типовых моделей, относят фильтры Баттерворта, Чебышева, Бесселя и др.

Для фильтра Баттерворта  $n$ -го порядка квадрат модуля передаточной функции характеризуется выражением

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}.$$

АЧХ фильтра обладает следующими основными свойствами: при любом  $n$  значение АЧХ  $|H(j0)| = 1$ ; на частоте среза  $\omega_c$   $|H(j\omega_c)| = 0,7$ . Поскольку АЧХ фильтра монотонно убывает с ростом частоты, фильтры Баттерворта иногда называют фильтрами с максимально плоскими характеристиками. На рисунке 3.26 приведены амплитудно-частотные характеристики для фильтров Баттерворта 3-го и 7-го порядков. Из рисунка видно, что чем выше порядок, тем ближе аппроксимируемая амплитудно-частотная характеристика к АЧХ идеального фильтра.

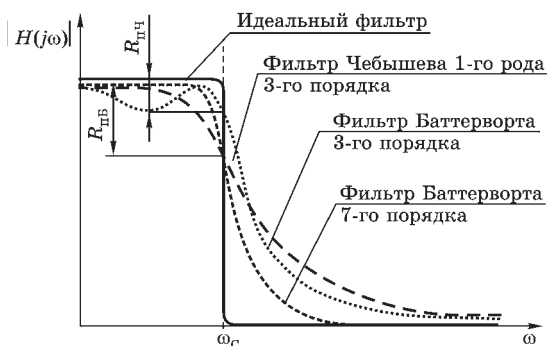


Рис. 3.26  
АЧХ  
низкочастотных  
фильтров  
Баттерворта  
и Чебышева

Порядок передаточной функции  $n$  выбирают из условия обеспечения требуемого затухания в полосе задерживания на частоте  $\omega > \omega_c$  с использованием приближенной формулы:

$$n = \frac{20 \lg |H(j\omega)|}{20 \lg(\omega / \omega_c)}, \quad (3.18)$$

где  $\omega$  — частота в полосе задерживания, на которой задана величина затухания.

Полученное с помощью формулы (3.18) значение  $n$  округляется в большую сторону до ближайшего целого

и модуль передаточной функции в полосе задерживания определяется выражением

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}.$$

Для фильтра Чебышева первого рода квадрат модуля передаточной функции определяется выражением

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)},$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент, определяющий уровень пульсаций в полосе пропускания фильтра;  $T_n(\omega)$  — полином Чебышева  $n$ -го порядка.

При  $n \geq 2$  полином Чебышева получают с помощью рекуррентной формулы

$$T_n(\omega) = 2\omega T_{n-1}(\omega) - T_{n-2}(\omega).$$

Коэффициент  $\varepsilon$  рассчитывается, исходя из заданной неравномерности АЧХ в полосе пропускания  $R_{\text{пч}}$  (рис. 3.26), согласно формуле

$$\varepsilon = \sqrt{10^{R_{\text{пч}}/10} - 1},$$

в которой искажение в полосе пропускания  $R_{\text{пч}}$  выражено в дБ.

График амплитудно-частотной характеристики фильтра Чебышева 3-го порядка показан на рисунке 3.26. Сравнивая АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева, можно сделать вывод, что при равных порядках  $n$  фильтр Чебышева обеспечивает большее ослабление в полосе пропускания, чем фильтр Баттерворта. Как видно из рисунка 3.26, недостаток фильтра Чебышева заключается в том, что его фазочастотная характеристика в полосе пропускания имеет нелинейный характер.

Рисунок 3.27 иллюстрирует, как осуществляется практическая реализация АЧХ с помощью LC-цепей для фильтров различных видов. Пассивные фильтры, реализующие характеристики Баттерворта или Чебышева, представляют собой  $T$ -образные (рис. 3.27а, в) или  $\Pi$ -образные (рис. 3.27б, г) LC-цепи. С их помощью можно

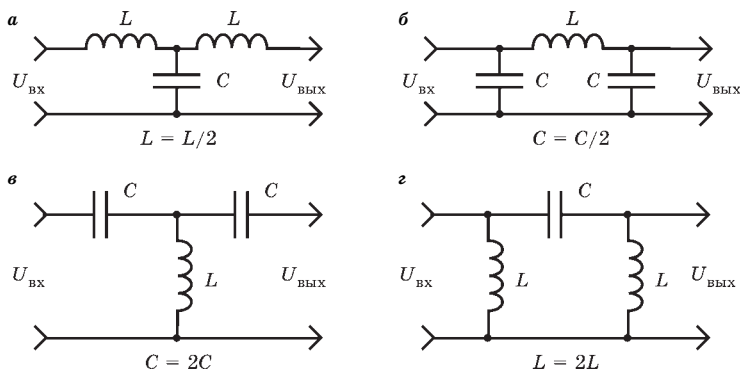


Рис. 3.27

Пассивные LC-фильтры:

*a, б* — фильтры низких частот; *в, з* — фильтры высоких частот.

реализовать только передаточные функции, нули передачи которых расположены на мнимой оси. Однако это не является серьезным ограничением, так как нули передачи частотно-селективных фильтров обычно и расположены на мнимой оси, включая начало координат и бесконечность.

У передаточных функций для фильтров низких частот Баттерворта и Чебышева нули передачи находятся в бесконечности и продольные ветви LC-цепи содержат индуктивности, а поперечные — емкости (рис. 3.27*a, б*). У фильтров высоких частот нули передачи расположены в начале координат, и продольные ветви содержат емкостные элементы, а поперечные — индуктивные, как показано на рисунке 3.27*в, з*. Отличие фильтров Баттерворта и Чебышева в этом случае заключается только в разных значениях реактивных элементов, получаемых в процессе расчета. Число таких элементов определяется порядком фильтра  $n$ .

Параметры элементов фильтров рассчитывают таким образом, чтобы обеспечить передачу максимальной мощности в полосе пропускания с использованием следующих практических формул:

для фильтров низких частот:

$$L = \frac{z_0}{\pi\omega_c}; \quad C = \frac{1}{\pi z_0 \omega_c}; \quad \omega_c = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}},$$



где  $z_0 = \sqrt{L/C}$  — характеристическое сопротивление фильтра;

для фильтров высоких частот:

$$L = \frac{z_0}{4\pi\omega_c}; \quad C = \frac{1}{4\pi z_0\omega_c}; \quad \omega_c = \frac{1}{4\pi\sqrt{LC}}.$$

Достоинствами пассивных фильтров являются простота, дешевизна, отсутствие дополнительных источников энергии, стабильность характеристик при изменениях номиналов элементов. К их основным недостаткам относят большие габариты и вес, обусловленные размерами катушек индуктивности. Этих недостатков лишены активные фильтры. Такой фильтр содержит резисторы, конденсаторы и активные элементы — транзисторы или операционные усилители.

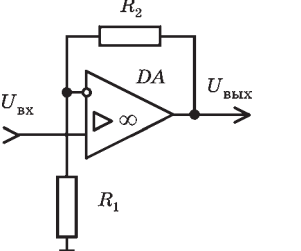
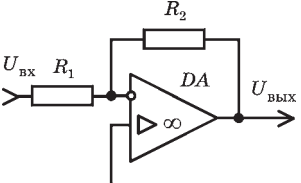
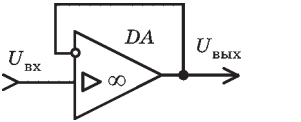
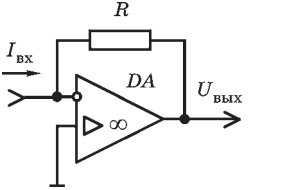
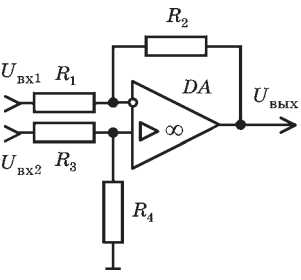
Под операционным усилителем (ОУ) принято понимать усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления, на основе которого можно строить узлы аппаратуры с параметрами, зависящими только от свойств охватывающей его цепи отрицательной обратной связи.

Само название такого усилителя — операционный, исторически связано с тем, что изначально он применялся в блоках аналоговых вычислительных машин для выполнения различных математических операций — суммирования, вычитания, дифференцирования, интегрирования и др. Ранние ОУ представляли собой довольно громоздкую ламповую схему, вскоре лампы были заменены на транзисторы, а в начале 1960-х гг. появились первые ОУ в интегральном исполнении. Миниатюризация исполнения открыла широкие возможности применения ОУ в аналоговых ЭС для весьма разнообразных целей.

В таблице 3.4 приведены математические модели некоторых типовых устройств на интегральных ОУ, а также их упрощенные схемы включения, позволяющие реализовывать с их помощью разнообразные функциональные узлы аналоговых ЭС.

Таблица 3.4

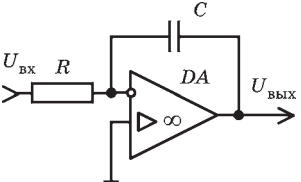
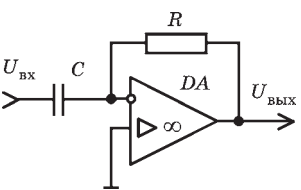
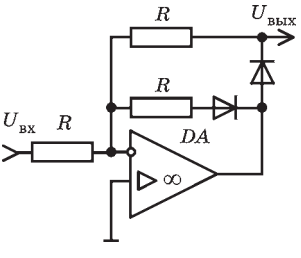
## Модели устройств на операционных усилителях

Тип устройства	Математическая модель	Упрощенная схема
Усилитель сигнала	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = kU_{\text{ВХ}}(t)$ , где $k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$	
Усилитель сигнала инвертирующий	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = -kU_{\text{ВХ}}(t)$ , где $k = R_2/R_1$	
Повторитель сигнала	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{\text{ВХ}}(t)$	
Преобразователь ток — напряжение	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = -RI_{\text{ВХ}}(t)$	
Схема вычитания с усилением сигнала	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = k(U_{\text{ВХ}2}(t) - U_{\text{ВХ}1}(t))$ , где $k = R_2/R_1 = R_4/R_3$	

Продолжение табл. 3.4

Тип устройства	Математическая модель	Упрощенная схема
Усилитель сигнала логарифмирующий	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{-kT \ln \frac{U_{\text{ВХ}}(t)}{RI_{\text{КБО}}(t)}}{q}$ <p>где <math>k</math> — постоянная Больцмана;  <math>T</math> — температура по Кельвину;  <math>I_{\text{КБО}}</math> — обратный ток коллектора транзистора <math>VT</math>; <math>q</math> — заряд электрона</p>	
Усилитель сигнала антилогарифмирующий	$\ln U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{-qU_{\text{ВХ}}(t)}{kT + \ln RI_{\text{КБО}}(t)}$	
Аттенюатор	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = kU_{\text{ВХ}}(t),$ <p>где <math>k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}</math></p>	
Сумматор с усилением сигнала	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = k(U_{\text{ВХ1}}(t) + U_{\text{ВХ2}}(t) + \dots + U_{\text{ВХn}}(t)),$ <p>где <math>k = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{n}</math></p>	
Компаратор	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} U^1 & \text{при } U_{\text{ВХ2}} - U_{\text{ВХ1}} > 0; \\ U^0 & \text{при } U_{\text{ВХ2}} - U_{\text{ВХ1}} < 0, \end{cases}$ <p>где <math>U^1, U^0</math> — напряжения логических «1» и «0» соответственно</p>	

Продолжение табл. 3.4

Тип устройства	Математическая модель	Упрощенная схема
Интегратор	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{ВХ}}(t) dt$	
Дифференциатор	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = -RC \frac{dU_{\text{ВХ}}(t)}{dt}$	
Прецизионный выпрямитель	$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} -U_{\text{ВХ}}(t) & \text{при } U_{\text{ВХ}}(t) < 0; \\ 0 & \text{при } U_{\text{ВХ}}(t) > 0 \end{cases}$	

Представленная в таблице 3.4 информация составляет лишь незначительную часть сведений о сфере применения в современных ЭС операционных усилителей. Так, на ОУ проектируются разнообразные схемы генераторов сигналов, активных фильтров, цифроаналоговых и аналогоцифровых преобразователей, усилителей и пр. [18]. При математическом моделировании таких устройств используются принципы, подобные рассмотренным выше для элементарных аналоговых устройств. Эти принципы реализованы также в различных пакетах САПР для схемотехнического моделирования, например *NI Multisim* и *MicroCAP* фирм *National Instruments* и *Spectrum Software* соответственно.

### 3.3.4. Модели цифровых устройств

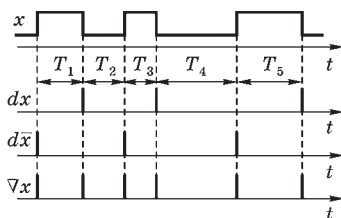
В настоящее время большинство ЭС функционируют в цифровой среде и используют микропроцессоры, элементы памяти, интерфейсы ввода/вывода и другие компоненты.

Анализ и синтез цифровых устройств требует введения новых понятий, появляются дополнительные элементы в электрических схемах (логические элементы (ЛЭ), триггеры, мультиплексоры и др.). Например, устройство, реализующее одну из основных логических операций или простейшую переключательную функцию, называется логическим элементом. Схема, составленная из набора ЛЭ по определенным правилам, называется логической схемой (ЛС). Если ЛС можно полностью описать переключательными функциями, то ее называют комбинационной схемой (КС).

В ЛС используются различные виды сигналов, образующихся в результате квантования и аналого-цифрового преобразования непрерывного по времени и амплитуде сигнала  $x(t)$ . В общем виде такие сигналы разделяют на потенциальные и импульсные [12].

Потенциальным называется сигнал в случае, когда интервал времени  $T_i$  между соседними изменениями сигнала существенно превышает время реакции схемы  $\tau_p$ , в которой он используется, т. е. если  $\min\{T_1, T_2, T_3, \dots\} \gg \tau_p$ , то сигнал  $x(t)$  потенциальный. Сигнал называется импульсным, если длительность его активного уровня того же порядка, что и время реакции схемы (рис. 3.28).

При аналитическом описании схем используется понятие абстрактного импульсного сигнала, длительность которого бесконечно мала. Реальные импульсные сигналы всегда имеют конечную длительность, определяемую временем реакции схемы. Импульсные сигналы образуются изменениями потенциальных сигналов с уровня логической 1 на 0 и (или) наоборот.



**Рис. 3.28**  
Импульсные сигналы,  
образованные изменением  
сигнала  $x$

Для описания изменений потенциальных и импульсных сигналов удобно использовать математический аппарат, основанный на операторах переходов  $d$  и  $\nabla$  [12], [19]. Импульсные сигналы  $dx$ ,  $d\bar{x}$  и  $\nabla x$  с высоким активным уровнем, образуемые изменениями потенциального сигнала  $x$ , показаны на рисунке 3.28.

Оператор переходов  $d$  определяется по формуле

$$dx(t) = \bar{x}(t)x(t - \Delta t). \quad (3.19)$$

Очевидно, что  $dx=1$  только при изменении потенциального сигнала с 1 на 0. Так как абстрактный потенциальный сигнал имеет бесконечно крутые фронты, а для абстрактного импульсного сигнала в соотношении (3.19)  $\Delta t \rightarrow 0$ . Обозначив сигнал  $x(t)$  через  $x$ , а сигнал  $x(t - \Delta t)$  через  $x^*$ , получим

$$dx = \bar{x} \cdot x^*. \quad (3.20)$$

Соотношение (3.20) учитывает время в явном виде и может использоваться не только для потенциальных сигналов, но и для переключательных функций от потенциальных сигналов:

$$df(v) = \overline{f(v)} \cdot f^*(v) = \overline{f(v)} \cdot f(v^*), \quad (3.21)$$

здесь  $f(v)$  и  $f^*(v)$  — значения функции в текущий и предыдущий моменты времени;  $v = (x_n, \dots, x_1)$ , а  $v^* = (x_n^*, \dots, x_1^*)$ .

Из (3.21) следует, что импульсные сигналы, порождаемые переключательными функциями от сигналов потенциальных, можно получить с помощью основных операций алгебры логики (см. § 2.3). Например, если  $f(v) = \bar{x}$ , то  $d\bar{x} = x \cdot \bar{x}^*$ , где  $d\bar{x} = 1$  только при изменении потенциального сигнала  $x$  с 0 на 1.

Имеет место тождество  $dx \cdot d\bar{x} = \bar{x} \cdot x^* \cdot x \cdot \bar{x}^* \equiv 0$ , которое отражает тот факт, что потенциальный сигнал не может одновременно изменяться с 1 на 0 и с 0 на 1. Необходимо отметить, что хотя с точки зрения алгебры логики сигнал  $x$  и сигнал  $x^*$  являются разными переменными, но поскольку их значения совпадают со значениями одного и того же сигнала, взятыми в различные моменты времени, то операторные соотношения учитывают время в явном виде.

Оператор переходов  $\nabla$  определяется соотношением

$$\nabla(x) = dx \vee d\bar{x} = x \oplus x^*, \quad (3.22)$$

где  $\nabla(x) = 1$  при изменении потенциального сигнала  $x$  как с 1 на 0, так и с 0 на 1.

Операторные выражения, описывающие импульсные сигналы, применяются для проектирования ЛС, формирующих такие сигналы. На рисунке 3.29а показана схема генератора импульсного сигнала  $dx$ , построенная в соответствии с (3.19), а на рисунке 3.29б — временные диаграммы ее работы.

На рисунке 3.30а показана схема удвоения частоты, выполненная согласно (3.22), а на рисунке 3.30б — временные диаграммы, поясняющие ее работу.

Поскольку ЛЭ не мгновенно реагирует на изменения входных сигналов, то присутствует некоторая задержка

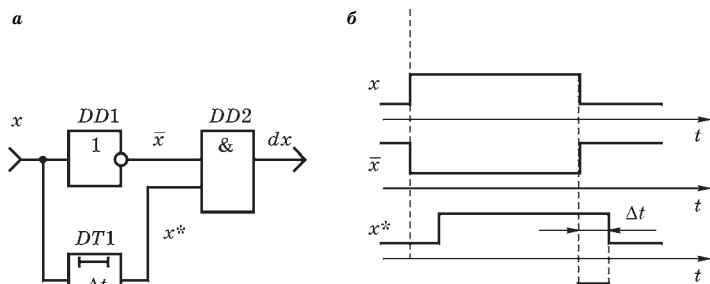


Рис. 3.29

Генератор импульсного сигнала:

а — логическая схема; б — временные диаграммы функционирования.

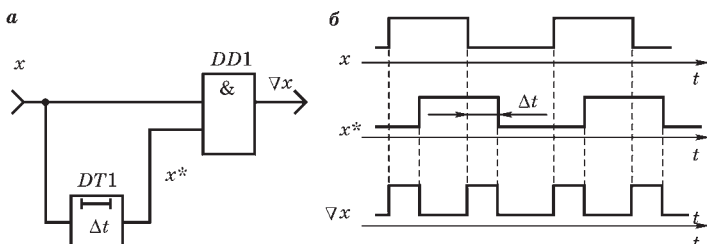


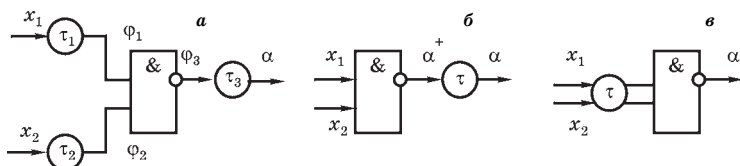
Рис. 3.30

Удвоитель частоты:

а — логическая схема; б — временные диаграммы ее работы.

между моментом времени, в который на входы ЛЭ поступают новые значения сигналов, и моментом времени, когда выходной сигнал принимает значение, определяемое функцией, которую выполняет ЛЭ. Так как эта функция не учитывает поведение ЛЭ при изменении входных сигналов, то она представляет собой статическую модель ЛЭ. Для исследования переходных процессов, вызываемых в ЛС изменениями входных сигналов, вводят динамические модели ЛЭ, учитывающие паразитные задержки. Тогда динамическая модель ЛС будет определяться динамической моделью ЛЭ и статической моделью ЛС.

В общем виде динамическая модель двухвходового ЛЭ И-НЕ приведена на рисунке 3.31а.



**Рис. 3.31**  
Динамические модели ЛЭ 2И-НЕ:

а — общая модель ЛЭ 2И-НЕ; б — модель с переменной задержкой; в — модель с виртуальной задержкой.

Эта модель состоит из безынерционного ЛЭ 2И-НЕ (статическая часть модели) и элементов задержки  $\tau_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Величины задержек  $\tau_1$  и  $\tau_2$  зависят от длины проводников, соединяющих выводы ЛЭ с источниками сигналов, длительности фронтов входных сигналов  $x_1$ ,  $x_2$  и от порогов срабатывания ЛЭ по входам. Величина  $\tau_3$  определяется инерционностью той части ЛЭ, через которую проходит сигнал, описываемый функцией  $x_1 \cdot x_2$ . Необходимо отметить, что значения величин  $\tau$  с течением времени могут изменяться, а также могут быть различными при переходах сигналов  $x_1$ ,  $x_2$  и  $\alpha$  с 0 на 1 и обратно.

Рассмотренная модель пригодна для описания любого ЛЭ (И, ИЛИ, ИЛИ-НЕ), если использовать в ней соответствующую статическую модель.

Полагая, что сигналы на входах ЛЭ не изменяются одновременно, когда на интервале  $\Delta\tau = |\tau_1 - \tau_2|$  изменяется



только сигнал  $x_1(x_2)$ , и что входные сигналы ЛЭ изменяются одновременно, если на интервале  $\Delta t$  сразу изменяются оба сигнала  $x_1$  и  $x_2$ , так как истинное соотношение величин задержек  $\tau_1$  и  $\tau_2$  неизвестно, можно сделать следующий вывод. Если сигналы  $x_1$  и  $x_2$  не изменяются одновременно, то модель ЛЭ 2И-НЕ сводится к виду, показанному на рисунке 3.31б. Здесь  $\tau$  — элемент задержки с переменной величиной,  $\tau = \tau_1 + \tau_3$  (или  $\tau = \tau_2 + \tau_3$ ), в зависимости от того, каким сигналом ( $x_1$  или  $x_2$ ) вызывается изменение выходного сигнала  $\alpha$ . Эта модель получила название динамической с переменной задержкой, математическая запись которой имеет вид

$$\alpha(t) = \overline{x_2(t - \tau)} \cdot x_1(t - \tau), \quad \alpha(t + \tau) = \overline{x_2(t)} \cdot x_1(t) = \alpha^+$$

Введя обозначения сигналов  $x_1(t) = x_1$ ,  $x_2(t) = x_2$  и  $\alpha(t) = \alpha$ , получим  $\alpha^+ = x_2 \cdot x_1 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1$ , где  $\alpha$  — значение выходного сигнала ЛЭ в данный момент времени;  $\alpha^+$  — значение выходного сигнала, которое появится через время  $\tau$  после изменения входных сигналов  $x_1$  и  $x_2$ .

Модель с переменной задержкой можно представить и в другом виде (рис. 3.31в), полагая, что элемент задержки  $\tau$  в момент изменения сигнала  $x_1$  (или  $x_2$ ) подключается к тому входу, на который этот сигнал подается, а на другом входе элемент задержки в этом случае отсутствует. Данная модель называется динамической с виртуальной задержкой.

Логический элемент находится в устойчивом состоянии, если сигналы до элемента задержки и после него совпадают, другими словами, если  $\alpha^+ = \alpha$ . При  $\alpha^+ \neq \alpha$  ЛЭ находится в неустойчивом состоянии, так как его выходной сигнал должен измениться через время, не превышающее  $\tau$ .

Логическая схема составляется из набора ЛЭ путем соединения выходов одних ЛЭ со входами других. Построение ЛС основано на следующих правилах:

- выход ЛЭ можно подсоединять ко входам нескольких ЛЭ;
- на входы ЛЭ можно подавать сигналы логического уровня 0 и 1;
- выходы ЛЭ нельзя соединять вместе;

- выходы ЛЭ нельзя подключать к собственным входам;
- ЛС может иметь любое число обратных связей, по которым выходные сигналы отдельных ЛЭ возвращаются на собственные входы, предварительно пройдя через некоторое количество других ЛЭ.

ЛЭ и их выходные сигналы обозначим символами  $\alpha_r^+$ ,  $r=1, 2, \dots, s$ , где  $s$  — количество ЛЭ в схеме. Динамической моделью ЛС называется совокупность функций, описывающих сигналы  $\alpha_r^+$  всех ЛЭ, входящих в состав ЛС [19]. На рисунке 3.32 показана ЛС с обратными связями, в которой использована модель ЛЭ с переменной задержкой (см. рис. 3.31б).

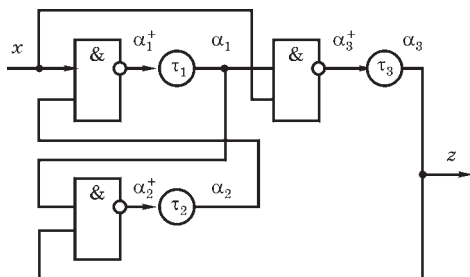


Рис. 3.32  
ЛС с обратными  
связями

Динамическая модель этой ЛС описывается функциями:

$$\alpha_3^+ = \bar{x} \vee \bar{\alpha}_1, \quad \alpha_2^+ = \bar{\alpha}_3 \vee \bar{\alpha}_1 \quad \text{и} \quad \alpha_1^+ = \bar{x} \vee \bar{\alpha}_2. \quad (3.23)$$

Представляя эти функции в общем виде, получим

$$\alpha_r^+ = f_r(x, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1), \quad r = 1, 2, 3. \quad (3.24)$$

Пусть ЛС состоит из  $s$  ЛЭ —  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , и имеет  $n$  входов, на которые подаются сигналы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и  $k$  выходов, с которых снимаются сигналы  $z_1, z_2, \dots, z_k$ . Тогда динамическую модель ЛС на основании (3.24) запишем в виде

$$\alpha_r^+ = f_r(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad r = 1, 2, \dots, s. \quad (3.25)$$

Данную систему функций можно представить в векторной форме:

$$\mu^+ = f(v, \mu), \quad (3.26)$$

где  $\mu^+ = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_s^+)$ ,  $v = (x_1, \dots, x_n)$  и  $\mu = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ .

Состоянием входа ЛС называется  $n$ -мерный вектор  $v_i = (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}, \dots, e_{x_n})$ , где  $e_{x_p}$  — значение входного сигнала ЛС  $x_p$  (принимает значение логического 0 или 1),  $i = e_{x_1}, \dots, e_{x_n}$ . Всего может быть  $2^n$  различных состояний входа  $v = (x_1, \dots, x_n)$ .

Внутренним состоянием ЛС называется  $s$ -мерный вектор  $\mu_j = (e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_r}, \dots, e_{\alpha_s})$ , где  $e_{\alpha_r}$  — значение выходного сигнала ЛЭ  $\alpha_r$  (принимает значение логического 0 или 1),  $j = e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_s}$ . Всего может быть  $2^s$  различных внутренних состояний  $\mu = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ .

Два состояния входа  $v_{i_1}$  и  $v_{i_2}$  (или два внутренних состояния  $\mu_{j_1}$  и  $\mu_{j_2}$ ) называются соседними, если они различаются значением только одного входного сигнала  $x_p$  (выходного сигнала ЛЭ  $\alpha_r$ ). Соседним изменением состояния входа называется изменение некоторого состояния входа  $v_{i_1}$  на любое соседнее состояние входа  $v_{i_2}$ . При соседних изменениях состояния входа изменяется только один входной сигнал ЛС. Изменения внутренних состояний называются переходами, поэтому система функций (3.25), а также функция (3.26) являются функциями переходов ЛС.

Так как выходными сигналами ЛС  $z_q$ ,  $q = 1, 2, \dots, k$  являются выходные сигналы  $k$  ЛЭ, то можно считать, что  $z_q = \alpha_q$  ( $q \leq s$ ). Состоянием выхода ЛС называется  $k$ -мерный вектор  $\lambda_l = (e_{z_1}, \dots, e_{z_q}, \dots, e_{z_k})$ , где  $e_{z_q}$  — значение выходного сигнала ЛС  $z_q$  (принимает значение логического 0 или 1),  $l = e_{z_1}, \dots, e_{z_k}$ . Всего может быть  $2^k$  различных состояний выхода  $\lambda = (z_1, \dots, z_k)$ .

На основании вышеизложенного для ЛС, показанной на рисунке 3.32, есть состояния  $v = (x)$ ,  $\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  и  $\lambda = (z)$ . Функция переходов ЛС (3.23) позволяет достаточно просто формальными методами проанализировать ее поведение при переходных процессах.

Логическая схема находится в устойчивом состоянии, если все ЛЭ, входящие в ее состав, также находятся в устойчивом состоянии. Значит, в устойчивых состояниях должны выполняться равенства  $\alpha_r^+ = \alpha_r$  для всех  $r$ , т. е.

$\mu^+ = \mu$ . Подставив значения сигналов  $\alpha_r^+$  в функцию переходов (3.25), получим систему логических уравнений

$$\alpha_r = f_r(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \quad (3.27)$$

с  $s$  неизвестными  $\alpha_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$ . Данная система представляет собой статическую модель ЛС. Если решения системы логических уравнений (3.27) относительно неизвестных  $\alpha_r$  не существует, то это означает, что ЛС при некоторых или всех состояниях входа не имеет устойчивых состояний.

Логическая схема находится в неустойчивом состоянии, если хотя бы один ее ЛЭ находится в неустойчивом состоянии, т. е. если  $\mu^+ \neq \mu$ . Если ЛС находится в неустойчивом состоянии  $\mu_{j1}$ , то оно изменится на некоторое состояние  $\mu_{j2}$  через время, определяемое паразитными задержками тех ЛЭ  $\alpha_r$ , которые находятся в неустойчивом состоянии. Поэтому отсутствие у ЛС при некоторых состояниях входа  $v_i$  устойчивых состояний означает наличие в ней автоколебательных процессов при данных состояниях входа.

Если ЛС является комбинационной схемой, то в устойчивых состояниях должно выполняться равенство

$$z_q = \alpha_q = f_q(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = f_q(x_1, \dots, x_n), \quad q = 1, 2, \dots, k. \quad (3.28)$$

Так как выходные сигналы КС не зависят от внутреннего состояния  $\mu = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ , то  $k$  функций из (3.28)  $\alpha_q = z_q$  не должны в устойчивых состояниях зависеть от состояния  $\mu$ .

Если в логической схеме при одном и том же состоянии входа получаются разные состояния выхода, то такие ЛС называются последовательностными схемами, или цифровыми автоматами. Такие схемы широко применяются в различных цифровых устройствах, поэтому теории цифровых автоматов посвящено множество работ, например [12], [20]. В рамках данного учебного пособия рассмотрим лишь основные положения данной теории.

Цифровые автоматы (последовательностные схемы) по способу воздействия на них входных информацион-

ных сигналов подразделяются на три основных класса: асинхронные потенциальные автоматы, синхронные автоматы и асинхронные импульсные автоматы. Каждый из классов автоматов разделяется на несколько типов по другим признакам.

На асинхронный потенциальный автомат воздействия производят непосредственно его входные информационные сигналы до тех пор, пока сохраняется их активный уровень.

В синхронном автомате используется единый для всего автомата тактовый сигнал, который осуществляет на него импульсное воздействие в соответствии с уровнями входных информационных сигналов, т. е. в синхронном автомате последние только управляют воздействиями, а момент времени воздействия полностью определяется тактовым сигналом.

Асинхронный импульсный автомат отличается от потенциального тем, что входные потенциальные сигналы производят на него импульсные воздействия в момент их изменения. Такие воздействия в синхронных автоматах производит только один сигнал — тактовый, а в асинхронных импульсных автоматах любой из входных сигналов может управлять воздействиями и производить их.

Так как воздействия активных уровней входных сигналов на асинхронный потенциальный автомат происходят непрерывно, то при их синтезе необходимо учитывать переходные процессы, вызываемые этими воздействиями. В синхронных же автоматах изменения входных сигналов не могут вызвать переходного процесса без участия тактового сигнала, который задает моменты времени, в которые автомат воспринимает значения входных сигналов. Тактовый сигнал поступает на синхронный автомат от внешнего генератора, не синхронизированного с его входными сигналами, поэтому в момент воздействия на автомат тактового сигнала входные сигналы не изменяются. Следовательно, переходные процессы в синхронных автоматах можно не рассматривать, обеспечив выбором соответствующей частоты тактового сигнала окончание переходного процесса к следующему моменту его воздействия.

Для проектирования цифровых автоматов используются не только ЛЭ, но и элементы памяти (ЭП), в качестве которых чаще всего используются триггеры. ЭП и триггеры являются элементарными автоматами, поэтому они, как и цифровые автоматы, также делятся на три класса. Классы автоматов различаются только типом используемых в них элементов памяти: с потенциальным воздействием входных сигналов, импульсным воздействием только одного тактового сигнала или с импульсным воздействием одного или нескольких входных сигналов.

Наиболее сложной является теория асинхронных потенциальных автоматов, и только ее методами можно синтезировать триггеры с импульсным восприятием изменений входных потенциальных сигналов. Такие триггеры необходимы для структурного синтеза автоматов, принадлежащих к другим классам.

В отличие от КС, значения выходных сигналов автомата в данный момент времени зависят не только от значений входных сигналов в этот же момент времени, но и от предыдущих их значений. Из этого следует, что цифровой автомат должен обладать памятью, в которой сохраняется информация о предыдущих входных воздействиях, пред-

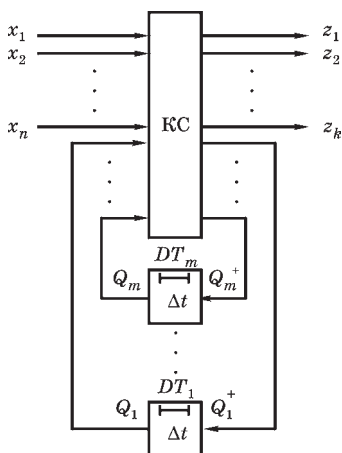


Рис. 3.33

Базовая модель асинхронного потенциального автомата

ставленная в виде совокупности сигналов, вырабатываемых памятью и называемых внутренними сигналами.

На рисунке 3.33 показана базовая модель асинхронного потенциального автомата, которая состоит из КС и элементов задержки  $DT$  входных сигналов на время  $\Delta t$ , включенных в обратных связях КС.

Элементы задержки производят запоминание внутренних сигналов КС  $DT_r = Q_r^+$ ,  $r=1, 2, \dots, m$  на время  $\Delta t$ , т. е. они являются элементами

памяти. Эти сигналы появляются на входах КС (выходах ЭП) через время  $\Delta t$  и могут вызвать изменение ее выходных сигналов. Следовательно, если сигнал  $Q_r = Q_r(t)$ , то сигнал  $Q_r^+ = Q_r(t + \Delta t)$ .

Основная модель синхронного автомата отличается от показанной на рисунке 3.33 только тем, что на ЭП типа  $DT$  подается еще и тактовый сигнал.

В общем случае автомат содержит  $m$  ЭП  $Q_1, \dots, Q_r, \dots, Q_m$  и имеет  $n$  физических входов, на которые подаются сигналы  $x_1, \dots, x_p, \dots, x_n$ , и  $k$  физических выходов, с которых снимаются сигналы  $z_1, \dots, z_q, \dots, z_k$ . При фиксированных значениях внутренних сигналов  $Q_r$  автомат ведет себя подобно некоторой КС, т. е. реализует однозначное соответствие между значениями входных и выходных сигналов. Однако при изменении входных сигналов его реакция может выразиться в изменении внутренних сигналов. Если затем подать прежние значения входных сигналов, то соответствие между значениями входных и выходных сигналов может оказаться совсем другим.

На основании основной модели автомата его внутренние  $Q_r^+$  и выходные  $z_q$  сигналы можно задать системами переключательных функций:

$$Q_r^+ = f_r(x_1, \dots, x_n, Q_1, \dots, Q_m), \quad r = 1, 2, \dots, m; \quad (3.29)$$

$$z_q = \varphi_q(x_1, \dots, x_n, Q_1, \dots, Q_m), \quad q = 1, 2, \dots, k, \quad (3.30)$$

где  $x_p = x_p(t)$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ ;  $Q_r = Q_r(t)$ ;  $Q_r^+ = Q_r(t + \Delta t)$  и  $z_q = z_q(t)$ .

Система функций (3.29) называется функцией переходов автомата, а система функций (3.30) — функцией выхода. Эти системы функций можно представить в векторной форме

$$\mu^+ = f(v, \mu), \quad \lambda = \varphi(v, \mu), \quad (3.31)$$

где  $\mu^+ = (Q_1^+, \dots, Q_m^+)$ ,  $v = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mu = (Q_1, \dots, Q_m)$ ,  $\lambda = (z_1, \dots, z_k)$ ,  $v = v(t)$ ,  $\mu = \mu(t)$ ,  $\mu^+ = \mu(t + \Delta t)$ ,  $\lambda = \lambda(t)$ .

Состоянием входа автомата называется  $n$ -мерный вектор  $v_i = (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}, \dots, e_{x_n})$ , где  $e_{x_p}$  — значение входного сигнала автомата  $x_p$  (принимает значение логического 0

или 1),  $i=(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ . Всего может быть  $2^n$  различных состояний входа  $v=(x_1, \dots, x_n)$ , т. е. множество  $N_0$  возможных состояний входа состоит из  $2^n$  элементов:

$$N_0 = \{v_0, v_1, \dots, v_{2^n-1}\}.$$

Внутренним состоянием автомата называется  $m$ -мерный вектор  $\mu_j=(e_{Q_1}, \dots, e_{Q_r}, \dots, e_{Q_m})$ , где  $e_{Q_r}$  — значение выходного сигнала ЭП  $Q_r$  (принимает значение логического 0 или 1),  $j=(e_{Q_1}, \dots, e_{Q_m})$ . Всего может быть  $2^m$  различных внутренних состояний  $\mu=(Q_1, \dots, Q_m)$ , т. е. множество  $M_0$  возможных внутренних состояний состоит из  $2^m$  элементов:

$$M_0 = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2^m-1}\}.$$

Состоянием выхода автомата называется  $k$ -мерный вектор,  $\lambda_l=(e_{z_1}, \dots, e_{z_q}, \dots, e_{z_k})$ , где  $e_{z_q}$  — значение выходного сигнала автомата  $z_q$  (принимает значение логического 0 или 1),  $l=(e_{z_1}, \dots, e_{z_k})$ . Всего может быть  $2^k$  различных состояний выхода  $\lambda=(z_1, \dots, z_k)$ , т. е. множество  $\Lambda_0$  возможных состояний выхода состоит из  $2^k$  элементов:

$$\Lambda_0 = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^k-1}\}.$$

Так как множества  $N_0$ ,  $M_0$  и  $\Lambda_0$  конечны, то цифровые автоматы иногда называют конечными автоматами. Необходимо отметить, что в конкретных цифровых автоматах множества  $N_0$ ,  $M_0$  и  $\Lambda_0$  могут использоваться неполностью. Например, при существовании каких-либо ограничений на значения входных сигналов, некоторые состояния выхода не смогут появиться при работе автомата (будут запрещенными). Поэтому в реальных автоматах могут использоваться подмножества  $N \subset N_0$ ,  $M \subset M_0$  и  $\Lambda \subset \Lambda_0$ .

Для формального описания цифрового автомата задают множества  $N$ ,  $M$ ,  $\Lambda$  и функции переходов и выхода (3.31), определенные на этих множествах. Для задания таких функций каждой паре  $(v_i, \mu_j)$  необходимо поставить в соответствие требуемые значения  $\mu_s$  и  $\lambda_l$ , т. е. необходимо задать соотношения

$$\mu_{ij}^+ = f(v_i, \mu_j) = \mu_s, \quad \lambda_{ij} = \varphi(v_i, \mu_j) = \lambda_l,$$

где  $v_i \in N$ ,  $\mu_j \in M$ ,  $\mu_s \in M$  и  $\lambda_l \in \Lambda$ .



Каждая пара  $(v_i, \mu_j)$  называется полным состоянием автомата, а совокупность всех возможных пар  $(v_i, \mu_j)$  представляет собой множество  $P = N \times M$ . Функции переходов и выхода автомата задают аналитическим, графическим и табличным способами, так как множества  $N$ ,  $M$  и  $\Lambda$  конечны.

Автоматы могут быть полностью определенными и неполными. Полностью определенными, или полными, называются такие автоматы, для которых функции переходов и выхода определены на всем множестве  $P$ , т. е. значения функций переходов и выхода заданы на всех парах  $(v_i, \mu_j) \in P$ . Если функции переходов и выхода определены только на подмножестве  $P_1 \subset P$ , т. е. значения этих функций заданы не на всех парах  $(v_i, \mu_j)$ , то автомат называется неполным [12].

Несмотря на то что назначением автоматов является преобразование входных последовательностей сигналов в выходные, иногда удобно рассматривать автоматы без выхода, задаваемые только множествами  $N$ ,  $M$  и функцией переходов, определенной на этих множествах. Автоматы без выхода появляются при решении задач, в которых интересуются только внутренним его поведением. В качестве выходных сигналов автомата  $z_q$  всегда можно использовать выходные сигналы ЭП  $Q_r$ . В этом случае множество  $\Lambda = M$  и функция выхода  $\lambda = \varphi(v, \mu) = \mu$ .

Два состояния входа  $v_{i1}$  и  $v_{i2}$  (два внутренних состояния  $\mu_{j1}$  и  $\mu_{j2}$ ) называются соседними, если они различаются значением только одного входного сигнала  $x_p$  (выходного сигнала ЭП  $Q_r$ ). Соседним изменением состояний входа называется изменение некоторого состояния входа  $v_{i1}$  на любое соседнее состояние входа  $v_{i2}$ . При соседних изменениях состояний входа изменяется только один входной сигнал автомата  $x_p$ . Изменения внутренних состояний называются переходами. Переходы являются соседними, если при этом внутреннее состояние  $\mu_{j1}$  изменяется на соседнее состояние  $\mu_{j2}$ .

Приведенные выше определения в равной степени относятся как к асинхронным потенциальным автоматам, так и к синхронным, а в большей своей части и к асинхронным импульсным автоматам.

Теории автоматов посвящена обширная литература различного уровня сложности, охватывающая в том числе и вопросы ее практической реализации, например [12], [20], [21].

### 3.3.5. Модели электродинамических объектов

При проектировании ЭС разработчику часто бывает необходимо иметь сведения о полях различной физической природы (электрических, магнитных, электромагнитных, тепловых, акустических и пр.), воздействующих на ЭС. Источником таких полей может являться как сама аппаратура (внутренний источник), так и окружающая ЭС среда (внешний источник). Знание о природе возникновения этих полей и их характеристик позволяет правильно спроектировать устройство, не только гарантировать его стойкость от вредных воздействующих полевых факторов, но и обеспечить необходимые значения технических параметров ЭС в том случае, если разрабатываемое устройство предназначено для передачи или приема радиосигнала. Поэтому одной из важнейших задач проектирования ЭС является моделирование в аппаратуре статических и динамических полей. Наиболее часто подобные задачи приходится решать при разработке электродинамических объектов, типичными представителями которых являются устройства СВЧ и антенны.

Моделирование подобных объектов связано с использованием системы уравнений Максвелла [6]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}; \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (3.33)$$

где  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$  — векторы напряженностей электрического и магнитного полей;  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$  —

векторы электрической и магнитной индукции;  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$  — вектор плотности тока проводимости;  $\vec{r}$  — радиус-вектор, означающий зависимость от пространственных координат;  $t$  — время;  $\rho$  — плотность заряда в заданном объеме;  $\epsilon$ ,  $\mu$  — электрическая и магнитная проницаемости среды;  $\sigma$  — удельная проводимость среды;  $\text{rot } \vec{E}$ ,  $\text{rot } \vec{H}$  — роторы векторов напряженностей электрического и магнитного полей соответственно.

Следует заметить, что уравнения (3.32) являются уравнениями Максвелла в дифференциальной форме, а (3.33) представляют собой материальные уравнения, зависящие от среды.

Векторные дифференциальные операторы над векторными полями  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  можно записать в виде

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}; \quad \text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix},$$

где  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  — единичные векторы (орты) на координатных осях;  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  и  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  — соответствующие составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Дивергенции векторов электрической ( $\vec{D}$ ) и магнитной ( $\vec{B}$ ) индукции представляют собой дифференциальные операции над компонентами соответствующих векторов:

$$\text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}; \quad \text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

К уравнениям (3.32), (3.33) добавляются граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих полей как на границе объема, в котором моделируется поле, так и внутри данного пространства.

Аналитическое решение данных уравнений с учетом граничных условий возможно только для простейших объемов, когда поверхности раздела совпадают с координатными плоскостями. Реальные электродинамические объекты

отличаются значительной сложностью и могут быть относительно велики в волновом масштабе, что существенно увеличивает трудоемкость вычислительных процессов при любом способе алгоритмизации краевой задачи [6], [22].

Поэтому наиболее универсальным методом моделирования и анализа СВЧ-устройств является подход, основанный на принципах декомпозиции, т. е. разбиения сложного устройства на ряд более простых, допускающих независимый анализ и характеризующихся матрицами параметров. Эти простые устройства называют базовыми элементами или блоками.

Используется два способа анализа базовых элементов. Первый предполагает замену каждого базового элемента некоторой схемой замещения, состоящей из сосредоточенных элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , а также регулярных отрезков линии передачи, четырехполюсников и многополюсников. Электродинамические расчеты каждого из базовых элементов выполняют заблаговременно, а результаты представляют в виде приближенных формул и справочных таблиц, определяющих связь номиналов элементов схемы замещения с геометрическими размерами базового элемента, свойствами среды и частотой.

Второй способ предусматривает разбиение СВЧ-устройства на автономные блоки в виде определенных геометрических конфигураций, допускающих аналитическое или численное решение краевой задачи и определение матриц параметров, а затем конструирование модели всего объекта [6], [22].

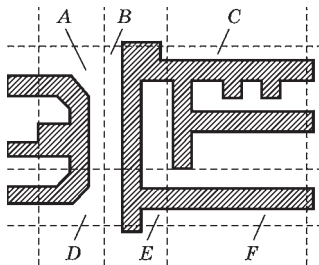


Рис. 3.34  
Полосковая линия

В качестве примера рассмотрим принцип декомпозиции для полоскового устройства, показанного на рисунке 3.34.

На этом рисунке показаны следы плоскостей, пересекающих устройство на блоки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$ , причем всякую смежную границу двух блоков можно рассматривать как поперечное сечение волнового

канала. С учетом этого можно утверждать, что выделенные блоки  $A, B, C, D, E, F$  описываются по отношению к волновым каналам в виде матриц рассеяния  $S_A, S_B, S_C, S_D, S_E$  и  $S_F$ . Если эти матрицы известны, то нетрудно получить модель объекта в целом без всякой потери информации о связях выделенных блоков. Так, в частности, для двух матриц рассеяния блоков  $A$  и  $B$  [6]:

$$S_A = \begin{bmatrix} S_{\alpha\alpha} & S_{\alpha\beta} \\ S_{\beta\alpha} & S_{\beta\beta}^A \end{bmatrix} \text{ и } S_B = \begin{bmatrix} S_{\beta\beta}^B & S_{\beta\gamma} \\ S_{\gamma\beta} & S_{\gamma\gamma}^A \end{bmatrix},$$

где  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — соответствующие сечения соединения многополюсников, показанного на рисунке 3.35.

Суммарную матрицу рассеяния для блоков  $AB$  можно представить в виде

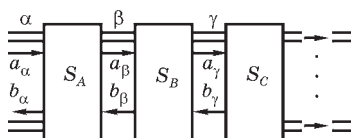


Рис. 3.35  
Соединение многополюсников по каскадной схеме

$$S_{AB} = \begin{bmatrix} S_{\alpha\alpha}^\Sigma & S_{\alpha\gamma} \\ S_{\gamma\alpha} & S_{\gamma\gamma}^\Sigma \end{bmatrix},$$

а ее элементы равны

$$\begin{cases} S_{\alpha\alpha}^\Sigma = S_{\alpha\alpha} + S_{\alpha\beta} S_{\beta\beta}^B (1 - S_{\beta\beta}^A S_{\beta\beta}^B)^{-1} S_{\beta\alpha}; \\ S_{\alpha\gamma} = S_{\alpha\beta} (1 - S_{\beta\beta}^B S_{\beta\beta}^A)^{-1} S_{\beta\gamma}; \\ S_{\gamma\alpha} = S_{\gamma\beta} (1 - S_{\beta\beta}^A S_{\beta\beta}^B)^{-1} S_{\beta\alpha}; \\ S_{\gamma\gamma}^\Sigma = S_{\gamma\gamma} + S_{\gamma\beta} S_{\beta\beta}^A (1 - S_{\beta\beta}^B S_{\beta\beta}^A)^{-1} S_{\beta\gamma}. \end{cases}$$

Далее к блоку  $AB$  присоединим следующий блок, например  $C$ , в результате чего получим матрицу рассеяния объединенного блока  $ABC$ , и т. д. до тех пор, пока не определится матрица рассеяния  $S$  устройства в целом.

Главной трудностью при декомпозиции является выбор оптимального варианта разбиения исходного объекта на автономные блоки и определение для них матриц рассеяния, которые получают, решая краевую задачу для

каждого из блоков. При этом используются два подхода к решению задачи [6]. Первый основан на выборе системы базисных функций, описывающих электродинамические процессы в блоке, решении краевой задачи и составлении модели блока. В качестве базисных часто используют собственные функции (или моды), например для токов, протекающих по фрагментам базисного элемента при отсутствии возбуждения. Так как моды тока ортогональны, то энергия, излучаемая одной из мод, не зависит от любых других существующих мод.

Второй подход предполагает использование функции Грина, соответствующей полю точечного источника и являющейся решением потенциального уравнения

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} G - k^2 G = j\omega\mu\delta(x - x_0),$$

где  $G$  — функция Грина;  $k = \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{c^2}}$  — волновой вектор;  $\omega$  — частота плоской волны;  $\epsilon, \mu$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $c$  — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме;  $\delta(x - x_0)$  — флуктуация точечного возбуждения в окрестностях точек  $x$  и  $x_0$ .

Тогда напряжение на любом выводе блока  $U_i$ , обусловленное током на  $j$ -м выводе плотностью  $\vec{J}_j$ , определяется интегральным соотношением

$$U_i = \sum_j \frac{\vec{J}_j}{2S_i S_j} \iint_{S_i S_j} G(s) ds,$$

где  $S_i, S_j$  — размеры вводов-выводов блока.

Элементы  $\mathbf{Z}$ -матрицы рассчитываются по подобной формуле:

$$z_{ij} = \frac{1}{2S_i S_j} \iint_{S_i S_j} G(s) ds.$$

Далее по полученной матрице  $\mathbf{Z}$  находят матрицу рассеяния всего блока.

При решении задач электродинамики для базовых блоков применяются различные проекционные методы:

Бубнова — Галеркина, частичных областей (Трефтца), минимальных автономных блоков, а также численные методы конечных разностей, конечных элементов и пр. Эти и другие методы подробно изложены в [6], [22] и в настоящем учебном пособии не приводятся.

Особый интерес представляют вопросы моделирования и автоматизированного проектирования антенных устройств. К настоящему времени издано множество работ различного уровня сложности, в той или иной степени охватывающих проблемы разработки излучающих устройств, например [22], [23], поэтому лишь кратко рассмотрим этапы их моделирования и проектирования с использованием средств автоматизации.

При автоматизированном проектировании любой антенной системы приходится решать внешнюю и внутреннюю задачи.

Первая формулируется как определение геометрии антенной системы и оптимального амплитудно-фазового распределения поля (тока) на ее элементах, обеспечивающих необходимые характеристики излучения антенной системы. Например, такой задачей является проектирование отдельных излучателей и антенных решеток по заданным требованиям к амплитудной диаграмме направленности (ДН), амплитудно-фазовой ДН или к интегральным параметрам ДН (коэффициент направленного действия, коэффициент рассеяния и т. п.). Кроме того, часто возникает необходимость в оптимизации геометрии излучающей системы. Решение внешней задачи начинается с этапа математического моделирования электромагнитного поля излучающей системы. По полученным результатам можно определить различные вторичные параметры излучения — коэффициент направленного действия, ширину луча, уровень боковых лепестков, а также входной импеданс антенной системы, необходимый для стыковки антенной системы с другими элементами радиотехнического комплекса.

Внутренняя задача сводится к проектированию распределительной системы, реализующей амплитудно-фазовое распределение, найденное при решении внешней

задачи. Данная проблема тесно связана с задачами проектирования активных и пассивных устройств, рассмотренными в [6]. При решении внутренней задачи необходимо учитывать специфику построения излучающей системы в виде фазированных или многолучевых антенных решеток с учетом взаимного влияния излучателей, их конструктивных особенностей и др.

При моделировании излучающих устройств на ЭВМ сначала составляется формализованное задание, выбирается физическая модель устройства, затем строится математическая модель, адекватная принятой физической модели, и, наконец, выполняется параметрический синтез устройства [6], [23].

Часто вопросы математического моделирования излучающих устройств бывают тесно связаны с приемами конструирования ЭС. Так, при проектировании модульных фазированных антенных решеток (ФАР) СВЧ-диапазона необходимо уже при системном и функциональном проектировании ФАР и ее основных частей (полотна модулей ФАР, излучателей, устройств СВЧ-тракта и т. д.) решать конструкторские задачи, в первую очередь определять топологию проектируемых объектов. При изменении частотного диапазона должна существенно меняться и топология устройств. Следовательно, САПР для проектирования ФАР должна представлять собой интегрированную систему с собственной системой управления, удовлетворяющую принципам иерархичности, декомпозиции и композиции. Практика показывает, что на стыках проектных работ различных уровней потеря времени не меньше, чем на стадии перехода от разработки к изготовлению, поэтому САПР также должна обеспечивать выполнение принципа информационного единства, определяющего информационную согласованность между различными этапами проекта (см § 1.3 настоящего пособия).

Последующие этапы проектирования, как правило, связаны с макетированием модулей ФАР с возможностью автоматизированной передачи данных в интегрированную САПР. Экспериментально полученные характери-



стики модуля могут быть исходными данными математической модели ФАР в целом, на базе которой решаются основные задачи системного проектирования.

### 3.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА СИСТЕМНОМ УРОВНЕ

Математическое моделирование проектируемых систем ЭС существенно отличается от моделирования отдельных устройств, входящих в систему. К этим особенностям относятся следующие [3]:

- моделирование функционирования радиоэлектронной системы в целом следует выполнять с учетом различных взаимосвязей составных частей, только в этом случае можно исследовать ее системные свойства, которыми не обладают части, рассматриваемые по отдельности. Другими словами, систему нельзя моделировать диакоптически (по отдельным составляющим ее устройствам), так как это не позволит выявить всех особенностей работы радиоэлектронной системы, обусловленных взаимосвязями частей;
- следует учитывать высокие размерности векторов переменных (фазовых координат, управляющих и возмущающих воздействий и др.), входящих в модель системы;
- электронные системы характеризуются большой сложностью (большим числом компонентов) при слабой структурированности теоретических и фактических знаний на этапах проектирования как о системе в целом, так и о ее компонентах;
- составные части системы физически разнородны, в их основе лежат различные принципы действия, а протекающие в них процессы имеют разную природу;
- на функционирование системы влияет большое число воздействий и факторов, характеризующихся случайностью и неопределенностью; отдельные связи между компонентами носят статистический характер;
- большинство процессов, протекающих в системе, отличаются быстроедействием, в качестве носителей информации используются различного вида сигналы, в том числе высоких и сверхвысоких частот;

- качество функционирования системы оценивается большим числом частных показателей.

Таким образом, ММ на системном уровне должны отражать все взаимосвязи многочисленных устройств в системе ЭС, их характеристики, различного рода внутренние и внешние факторы. Например, на решение с использованием ММ таких важных задач, как оценка дальности действия и точности системы радиосвязи, большое влияние оказывает взаимодействие (согласование характеристик) передающего, антенно-фидерного и приемного устройств, а также наличие естественных и искусственных помех [3].

ММ системного уровня широко применяются при проектировании ЭС для решения задач оценки эффективности работы в различных состояниях функционирования. Наиболее важными задачами моделирования являются проверка выполнения требований к радиоэлектронной системе, содержащихся в техническом задании, в частности по характеристикам целевого назначения системы, надежности, помехозащищенности и т. д. Применение ММ позволяет имитировать работу системы в различных ситуациях до изготовления макетов и опытных образцов, сократить число дорогостоящих экспериментов на действующей системе, определить предельные условия работы системы без ее выхода из строя и пр.

Процесс моделирования систем ЭС выполняется на ЭВМ и включает следующие основные этапы:

- 1) формализация проектных задач, которые предполагается решать с использованием ММ;
- 2) разработка требований к модели;
- 3) построение обобщенной математической модели системы;
- 4) планирование и организация вычислительных экспериментов;
- 5) разработка программного обеспечения для проведения вычислительных экспериментов и проверка алгоритмической надежности разработанной модели;
- 6) выполнение вычислительных экспериментов;

7) обработка результатов вычислительных экспериментов и использование их для решения проектных задач.

При разработке модели на системном уровне сначала строится формальная аналитическая модель на основе знаний о проектируемой системе, затем по этой модели разрабатывается программа для ЭВМ, т. е. создается компьютерная модель системы.

Формальные или алгоритмические модели применяются на разных уровнях моделирования ЭС. В зависимости от степени детализации системы и описываемых свойств выделяют:

- модели потенциальной предельной достижимости;
- системотехнические (имитационные) модели;
- функциональные модели;
- схемотехнические модели и др.

Модели потенциальной предельной достижимости строятся на основе фундаментальных физических законов, они позволяют оценить показатели эффективности проектируемой системы на существующем уровне развития науки и техники.

Системотехнические или имитационные модели делятся на дискретные, непрерывные и комбинированные. Для разработки имитационных моделей обычно применяется агрегативный подход [24], в соответствии с которым система декомпозируется на ряд подсистем (компонентов) с сохранением взаимосвязей. Функционирование компонентов описывается математическими агрегатами. Каждый агрегат представляется многополюсным элементом с входными и выходными цепями, для которого соответствующие поступающие и снимаемые сигналы называются входными и выходными. Состояние агрегата в каждый момент времени определяется вектором фазовых координат (вектором состояния). Связь между переменными агрегата определяются двумя операторами, аналогичными операторам динамической системы. Для описания соединений агрегатов составляется таблица, в которой единицы означают наличие связи между агрегатами, а нули — отсутствие. В ходе моделирования

агрегаты обмениваются сигналами согласно таблице соединений, имитируя работу системы.

Широкими возможностями для исследования радиосистем обладают дискретные имитационные модели (ДИМ), позволяющие отразить разные аспекты динамики работы системы. Имитируемый процесс функционирования такой системы здесь представляет собой упорядоченную во времени последовательность событий или действий. Под действием понимается изменение состояния компонентов или всей системы, а событие определяет начало или конец действия. Предполагается, что состояние системы может изменяться только в моменты времени совершения событий. В зависимости от способа организации действий выделяют четыре подхода к построению ДИМ [6].

1. Событийный подход основан на следующих предположениях: действия всех компонентов, изменяющих состояние системы, одинаковы; связи между отдельными действиями, выполняемыми независимо одно от другого, отсутствуют; в результате одних и тех же событий происходят одинаковые действия. При данном подходе разработка ДИМ заключается в описании взаимосвязи событий между собой и временных характеристик действий компонентов. Построенная таким образом ДИМ позволяет имитировать функционирование системы в виде выполнения упорядоченной во времени последовательности событий.

2. Подход сканирования активностей предполагает описание действий компонентов, которые могут быть различными. В результате совершения действий в системе происходят различные заранее не планируемые события, которые определяются условиями для этих действий. Основу модели составляют наборы процедур, моделирующих действия, и процедур проверки выполнимости условий начала и окончания действий. Проверка условий производится при каждом продвижении имитационного времени для всего множества действий, т. е. выполняется операция сканирования. Имитация работы системы с помощью ДИМ, использующих данный подход, требу-

ет больших времѐнных затрат по сравнению с моделями событийного подхода, вместе с тем применение способа сканирования активностей позволяет полнее исследовать моделируемую систему.

3. Процессно-ориентированный подход применяется для построения ДИМ систем, у которых функциональные действия отдельных компонентов существенно различаются. При этом для разных компонентов имеет место своя последовательность элементарных действий. Имитационная модель системы строится как композиция наборов описаний процессов компонентов и управляющих связей между ними. Такая модель достаточно наглядно и полно отражает физические процессы и архитектуру проектируемой системы, она удобна при выявлении узких мест в работе системы при различных ситуациях.

4. Транзактный подход в основном используется при построении ДИМ систем, состоящих из однотипных компонентов, которые выполняют простые операции. При моделировании системы необходимо учитывать зависимость выполнения действий друг от друга. Процессы функционирования таких систем аналогичны процессам в системах массового обслуживания. Моделирование этих процессов связано с рассмотрением потока заявок на обслуживание, называемых транзактами. Заявки поступают в случайные моменты времени, время их обслуживания также обычно считается случайным.

При проектировании систем выделяют традиционное моделирование, алгоритмическое моделирование, «мягкое моделирование», учитывающее свойство нечеткости систем, моделирование, использующее методы искусственного интеллекта, «когнитивное моделирование», а также множественное моделирование на основе формализации алгоритмических сетей и другие технологии моделирования.

С развитием науки и техники объектами исследования становятся все более сложные системы, которые нельзя исследовать только в предположении их нормальной работоспособности или нормального функцио-

нирования. В сложных системах, вследствие исключительно большого числа элементов, их многофункциональности, введения различных видов избыточности, происходят изменения состояний работоспособности элементов без прекращения функционирования системы.

#### **3.4.1. Модели систем массового обслуживания**

Многие радиоэлектронные системы при решении задач анализа и синтеза рассматриваются как системы массового обслуживания (СМО) [1], [3]. СМО могут быть одноканальными и многоканальными, их функционирование заключается в выполнении поступающего на нее потока требований (транзактов, заявок). Заявки поступают одна за другой или группами в отдельные, обычно случайные моменты времени. Обслуживание поступившей заявки продолжается некоторое время, которое также может рассматриваться как случайное, после чего соответствующий канал освобождается и снова готов к приему следующей заявки. Типичным примером СМО являются телекоммуникационные сети.

Любая система массового обслуживания характеризуется структурой, определяемой составом и функциональными связями. Типичная СМО содержит следующие компоненты:

- входящий поток заявок;
- каналы обслуживания;
- очередь заявок, ожидающих обслуживания;
- выходящий поток заявок.

В зависимости от числа каналов и их производительности СМО обладает некоторой пропускной способностью, позволяющей с определенной эффективностью выполнять поток заявок. Задачей моделирования систем массового обслуживания является установление зависимости между характером потока заявок, производительностью каналов, числом каналов, сценарием и эффективностью обслуживания. Показателями эффективности обслуживания в зависимости от условий и целей исследуемой задачи могут быть:

- средний процент заявок, получающих отказ и покидающих систему необслуженными;
- среднее время ожидания в очереди;
- вероятность того, что поступившая заявка будет принята к обслуживанию без ожидания в очереди;
- среднее число заявок в очереди (т. е. длина очереди) и т. д.

Каждый из этих показателей характеризует степень приспособленности системы к выполнению потока заявок, т. е. ее пропускную способность.

В узком смысле под пропускной способностью обычно понимают среднее число заявок, которое система может обслужить в единицу времени. Наряду с этим используется термин «относительная пропускная способность», который определяется как среднее отношение количества обслуженных заявок к числу поданных. В общем случае пропускная способность, как абсолютная, так и относительная, зависит и от параметров системы, и от характера потока заявок.

Если заявки поступают регулярно, т. е. через определенные промежутки времени, и обслуживание каждой заявки имеет строго определенную длительность, то расчет пропускной способности системы не вызывает затруднений. На практике заявки обычно поступают в случайные моменты времени, длительность обслуживания заявок также носит случайный характер. Поэтому процесс работы системы протекает нерегулярно, в потоках заявок образуются местные сгущения и разрежения. Сгущения входного потока могут приводить к отказам в обслуживании и к образованию очередей, а разрежения — к непроизводительным простоям отдельных каналов или системы в целом. На эти случайности, вызываемые неоднородностью потока заявок, дополнительно накладываются случайности, связанные с задержками обслуживания отдельных заявок. В результате действия этих факторов процесс функционирования СМО представляет собой случайный процесс. Для решения задач анализа и синтеза СМО, оценки ее пропускной способности необходимо разработать математическую модель случайного процесса, протекающего в системе.

Под потоком событий как в теории массового обслуживания, так и в теории надежности понимается последовательность событий, происходящих одно за другим в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Примерами таких потоков могут служить: поток сообщений; последовательно поступающие обращения к базе данных; поток заявок на обслуживание телекоммуникационной сети; поток отказов в автоматической системе и т. п.

В общем случае события, образующие поток, могут быть различными. Если для моделирования работы СМО рассматривается поток, в котором события различаются лишь моментами появления, то его называют потоком однородных событий. Как уже отмечалось, обычно события происходят в случайные моменты времени, поэтому и соответствующий поток событий называется случайным. Однако в редких случаях возможны регулярные потоки, когда события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени. Регулярный поток сравнительно редко встречается в реальных системах, однако он представляет интерес как предельный случай для других потоков. В последующем изложении материала поток событий будем считать однородным и случайным.

При моделировании СМО к наиболее важным свойствам потоков заявок относят следующие.

1. *Стационарность*. Поток событий считается стационарным, если вероятность попадания определенного числа событий на интервал времени длиной  $\tau$  зависит только от длины этого интервала и не зависит от того, в каком месте на временной оси расположен этот участок.

2. *Отсутствие последствия*. Поток событий называется потоком без последствия, если для любых неперекрывающихся интервалов времени число событий, попадающих на один временной отрезок, не зависит от числа событий, попадающих на другие отрезки времени.

3. *Ординарность*. Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания двух или более событий на элементарный (малый) отрезок времени  $\Delta t$  пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на этот временной интервал одного события.



Поток событий, обладающий тремя перечисленными свойствами, называется простейшим, или стационарным пуассоновским, поскольку для простейшего потока число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, распределено по закону Пуассона.

Условию стационарности удовлетворяют потоки, вероятностные характеристики которых не зависят от времени. Для стационарного потока характерна постоянная плотность, т. е. среднее число событий в единицу времени. На практике часто встречаются потоки, которые могут рассматриваться как стационарные на ограниченном интервале времени. Например, поток вызовов на телефонной станции в определенное время суток (например, ночью) может считаться стационарным, а в течение целых суток поток уже нельзя отнести к стационарному.

Условие отсутствия последействия, когда заявки поступают на обслуживание независимо друг от друга, во многих случаях приемлемо для входных потоков. Однако выходной поток обслуженных заявок обычно имеет последействие, даже если у входного потока последействие отсутствует.

Условие ординарности потока означает, что заявки на обслуживание приходят поодиночке, а не группами (парами, тройками и т. п.). Если в неординарном потоке заявки поступают одинаковыми по составу группами, то его можно свести к ординарному. Для этого достаточно вместо потока отдельных заявок рассмотреть поток групповых заявок. Если отдельные заявки случайным образом окажутся двойными, тройными и пр., то рассматривают поток разнородных событий.

Простейший поток заявок играет в теории массового обслуживания особую роль, аналогичную роли нормального закона среди законов распределения случайных величин. Известно, что при суммировании большого числа независимых случайных величин, имеющих различные законы распределения, результирующая величина имеет распределение, близкое к нормальному закону. Аналогично, при суммировании большого числа ординарных стационарных потоков, имеющих последействие, получа-

ется поток, близкий к простейшему. Это имеет место при условии, что складываемые потоки должны оказывать на суммарный поток равномерно малое влияние. Обычно достаточно сложить не менее 4–5 потоков, чтобы получить поток, который можно рассматривать как простейший.

Представим отдельный независимый поток событий  $\Pi_i$  как последовательность моментов времени наступления каких-либо событий  $t_j^{(i)}$ ,  $j=1, n$ . Для входных потоков в качестве событий рассматриваются поступления заявок. Суммирование нескольких потоков  $\Pi_i$ ,  $i=1, k$  заключается в том, что все моменты времени появления событий переносятся на одну временную ось, образуя моменты времени  $t_l$ ,  $l=1, m$ ,  $m=kn$ , как показано на рисунке 3.36,

и суммарный поток событий будет равен  $\Pi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k \Pi_i$ .

Удобство использования простейшего потока в теории массового обслуживания объясняется следующим. Во-первых, простейшие и близкие к ним потоки часто встречаются на практике. Во-вторых, при потоках заявок, отличающихся от простейших, во многих случаях можно получить приемлемые по точности результаты, если

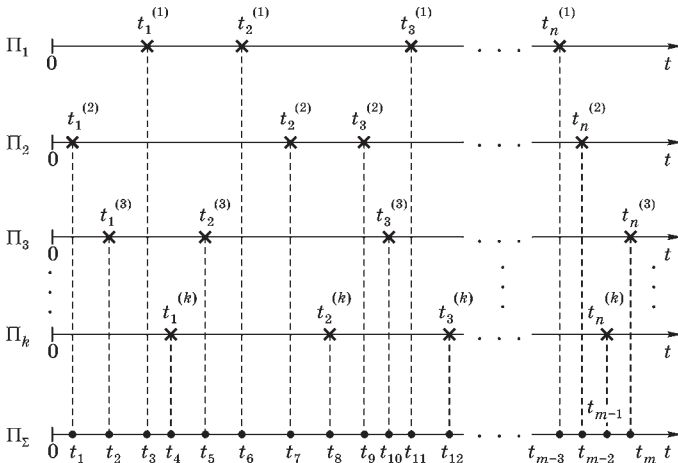


Рис. 3.36

Суммирование потоков событий

поток любой структуры заменить простейшим с той же плотностью.

Для простейшего потока, как уже отмечалось, число точек, попадающих на временной участок  $\tau$ , распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием

$$a = \lambda\tau,$$

где  $\lambda$  — плотность потока.

Вероятность того, что за время  $\tau$  произойдет ровно  $m$  событий, определяется по формуле

$$p_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, вероятность того, что участок  $\tau$  окажется пустым, т. е. при отсутствии событий ( $m=0$ ), равна

$$p_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}.$$

Случайное время  $T$  между соседними событиями в простейшем потоке подчиняется показательному (экспоненциальному) распределению с плотностью вероятности

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

где  $\lambda$  — параметр распределения.

Функция распределения времени  $T$  для этого закона имеет вид

$$F(t) = \mathcal{P}[T < t] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Здесь  $\mathcal{P}[T < t]$  — вероятность случайного события за время  $T$  между соседними событиями, а математическое ожидание  $m_T$  и дисперсия  $D_T$  соответственно равны

$$m_T = M[T] = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}; \quad D_T = \lambda \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - m_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

В случае показательного распределения времени  $T$  любая информация о том, сколько этот промежуток времени уже протекал, не влияет на закон распределения

оставшегося времени. Это свойство показательного закона непосредственно связано со свойством отсутствия последствия простейшего потока.

Поток однородных событий, ординарный и без последствия, но нестационарный, называется нестационарным пуассоновским потоком. Такой поток характеризуется мгновенной плотностью потока  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$ , т. е.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[0; t + \Delta t] - M[0; t]}{\Delta t},$$

где  $M[0; t]$  — математическое ожидание числа событий на участке  $[0; t]$ .

Для нестационарного пуассоновского потока число событий  $m$ , попадающих на временной интервал  $\tau$ , начинающийся в момент времени  $t_0$ , подчиняется закону Пуассона:

$$P_m(\tau, t_0) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $a$  — математическое ожидание числа событий на временном интервале  $[t_0; t_0 + \tau]$ , т. е.

$$a = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt.$$

Плотность распределения вероятности времени  $T$ , функция распределения и вероятность того, что на интервале  $[t_0; t_0 + \tau]$  не появится ни одного события, для данного потока соответственно равны

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t_0 + t) \exp \left[ - \int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(s) ds \right], \quad t > t_0;$$

$$F_{t_0}(t) = 1 - \exp \left[ - \int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(s) ds \right] = 1 - e^{-a};$$

$$P(t) = \mathcal{P}[T \geq t] = e^{-a}.$$

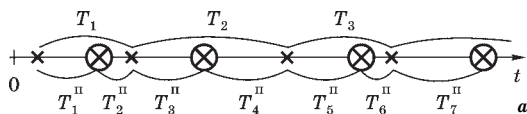
Если в простейшем потоке снять ограничение на отсутствие последействия, при этом промежутки времени между последовательными событиями  $T_1, T_2, \dots$  представляют собой независимые случайные величины, то такой поток преобразуется в поток с ограниченным последействием (поток Пальма). Модель данного потока широко используется для выходных потоков СМО, а также при анализе надежности систем с резервированием. Например, если входной поток заявок простейший, то поток необслуженных заявок (в результате выбывания вследствие занятости всех каналов СМО) будет потоком с ограниченным последействием.

Большое применение на практике находят модели потоков с ограниченным последействием в виде потоков Эрланга различного порядка, которые образуются «просеиванием» простейшего потока. Если в простейшем потоке выбросить каждую вторую точку, то оставшиеся точки образуют поток Эрланга первого порядка, если же в простейшем потоке сохранять каждую третью точку, то получим поток Эрланга второго порядка и т. д. На рисунке 3.37а, б показаны примеры образования таких потоков, «выброшенные» точки здесь обведены кружками.

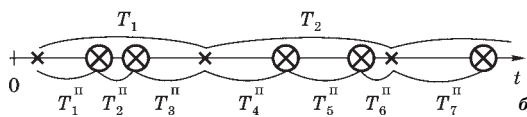
Для потока Эрланга  $k$ -го порядка время  $T$  между соседними событиями равно сумме  $k + 1$  независимых случайных величин, т. е.

$$T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i^n,$$

где  $T_1^n, T_2^n, \dots, T_{k+1}^n$  — независимые случайные величины, подчиненные одному и тому же показательному закону (3.34) с параметром  $\lambda$ .



**Рис. 3.37**  
Образование потоков Эрланга:  
а — первого порядка;  
б — второго порядка.



Закон распределения времени  $T$  в этом случае называется законом Эрланга  $k$ -го порядка, его плотность вероятности имеет вид

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия времени  $T$  соответственно равны

$$m_k = \frac{k+1}{\lambda}; \quad D_k = \frac{k+1}{\lambda^2},$$

а плотность потока составляет

$$\Lambda_k = \frac{\lambda}{k+1}.$$

Заметим, что при неограниченном увеличении  $k$  поток Эрланга приближается к регулярному потоку.

Показательное распределение и распределение Эрланга широко используются в теории массового обслуживания также в качестве законов распределения случайной величины времени обслуживания одной заявки  $T_{об}$ . В случае показательного закона для времени  $T_{об}$  его характеристики записываются в виде:

$$g(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

$$G(t) = \mathcal{P}[T_{об} < t] = 1 - e^{-\mu t}; \quad (3.35)$$

$$m_{T_{об}} = \frac{1}{\mu}; \quad D_{T_{об}} = \frac{1}{\mu^2},$$

где  $\mu$  — параметр распределения времени обслуживания, т. е. величина, обратная среднему времени обслуживания одной заявки.

В процессе функционирования состояния СМО изменяются скачкообразно. Изменение состояния может быть вызвано приходом новой заявки, освобождением канала в результате обслуживания заявки, уходом заявки из очереди и т. п. Учитывая, что число возможных состояний системы считается конечным (счетным), обозначим множество этих

состояний  $\mathcal{X} = \{x_i, i=0, 1, 2, 3, \dots\}$ . В любой момент времени  $t$  система может находиться только в одном из этих состояний, т. е.  $x_i \in \mathcal{X}$ . Вероятность того, что в момент времени  $t$  система находится в состоянии  $x_i$ , обозначим  $p_i(t)$ . Для любого момента времени  $t$  должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i \in I} p_i(t) = 1, \tag{3.36}$$

где  $I$  — множество номеров состояний системы.

Случайные процессы, протекающие в СМО, обычно представляют собой процессы с непрерывным временем, что связано со случайностью потока заявок. Изменения состояний системы могут быть представлены ориентированным графом  $\mathcal{G}$  изменения состояний. Вершины графа соответствуют возможным состояниям, а дуги — переходам из одного состояния в другое за малый промежуток времени  $dt$ .

В качестве примера на рисунке 3.38 приведен граф  $\mathcal{G}$ , отображающий изменение состояний в системе обслуживания с тремя каналами. Система может находиться в четырех состояниях:  $x_0$  — все каналы свободны;  $x_1$  — один канал занят;

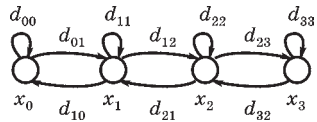


Рис. 3.38  
Граф  $\mathcal{G}$  системы с четырьмя состояниями

$x_2$  — занято два канала и  $x_3$  — все каналы заняты. Если система в момент времени  $t$  находилась в состоянии  $x_0$ , то за малое время  $dt$  она может перейти в состояние  $x_1$  при поступлении заявки (дуга  $d_{01}$ ) или остаться в состоянии  $x_0$  (дуга  $d_{00}$ ), если заявок не поступало, и т. д.

Если входящий поток заявок пуассоновский и время обслуживания имеет показательное распределение, то для анализа функционирования СМО применяют аппарат марковских случайных процессов.

Процесс называется марковским, или процессом без последействия, если для каждого момента времени  $t_0$  вероятность  $P(t)$  любого состояния  $x$  системы в будущем, т. е. в момент времени  $t > t_0$ , зависит только от состояния системы  $x(t_0)$  в настоящий момент  $t_0$  и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

Марковский процесс в СМО со счетным множеством состояний и непрерывным временем можно описать с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений, где неизвестными функциями являются вероятности  $p_i(t)$  состояний  $x_i$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$

В зависимости от схемы обслуживания выделяют два типа СМО: системы с отказами и системы с ожиданием. В системах с отказами заявка, поступившая в момент времени, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания эта заявка не участвует. В системах с ожиданием заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится какой-нибудь канал, т. е. заявка систему не покидает.

Рассмотрим  $n$ -канальную СМО с отказами. Ее возможными состояниями являются следующие:  $x_0$  — свободны все  $n$  каналов,  $x_1$  — занят один канал,  $x_n$  — заняты все  $n$  каналов. Пусть поток заявок простейший с плотностью  $\lambda$  и случайное время обслуживания имеет показательное распределение с параметром  $\mu$  (см. уравнения (3.34) и (3.35)). Учитывая, что смысл параметра  $\lambda$  — плотность потока заявок или интенсивность поступления заявок, то параметр  $\mu$  можно считать плотностью потока освобождений занятого канала или интенсивностью обслуживания. Так как потоки заявок и освобождений — простейшие, то процесс в такой СМО марковский, и система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t); \\ &\dots \\ \frac{dp_i(t)}{dt} &= \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu) p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \quad 1 < i < n; \\ &\dots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t). \end{aligned} \tag{3.37}$$



Система уравнений (3.37) называется уравнениями Эрланга, обычно она решается при начальных условиях:

$$p_0(0)=1; p_1(0)=\dots=p_n(0)=0,$$

т. е. считается, что в начальный момент времени ( $t_0=0$ ) все каналы свободны.

Систему линейных дифференциальных уравнений (3.37) можно представить в векторно-матричной форме:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(t),$$

где  $\dot{\mathbf{P}}$ ,  $\mathbf{P}(t)$  — соответствующие  $(n+1)$ -вектор-столбцы, т. е.

$$\dot{\mathbf{P}} = \left[ \frac{dp_0(t)}{dt}, \frac{dp_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dp_n(t)}{dt} \right]^T;$$

$$\mathbf{P}(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)]^T;$$

$\mathbf{A}$  — матрица коэффициентов размерностью  $(n+1) \times (n+1)$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda + \mu) & 2\mu & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -n\mu \end{bmatrix}.$$

Вероятности  $p_i(t)$  характеризуют изменение средней загрузки системы с течением времени. В частности,  $p_n(t)$  есть вероятность того, что заявка, пришедшая в момент  $t$ , застанет все каналы занятыми, такое состояние может рассматриваться как состояние отказа системы, т. е.

$$P_{\text{отк}}(t) = p_n(t).$$

Величину  $q(t) = 1 - p_n(t)$  называют относительной пропускной способностью системы. Она равна отношению среднего числа обслуженных за единицу времени заявок к среднему числу поданных.

Система уравнений (3.37) достаточно легко решается при любом числе каналов  $n$ . Следует заметить, что уравнения (3.37) справедливы и для зависящих от времени

$\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$ , если потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, остаются пуассоновскими.

При  $t \rightarrow \infty$  вероятности  $p_i(t)$ ,  $i=0, n$  стремятся к своим предельным (стационарным) значениям  $p_i$ ,  $i=0, n$ . Для определения стационарных значений вероятностей состояний системы решается система линейных алгебраических уравнений:

$$AP=0; P=(p_0, p_1, \dots, p_n)^T, \quad (3.38)$$

при этом одно уравнение системы (3.38) заменяется усло-

вием нормировки (3.36), т. е.  $\sum_{i=0}^n p_i = 1$ .

Например, для  $n=2$  система алгебраических уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0; \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2 &= 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 &= 1. \end{aligned}$$

Для расчета стационарных вероятностей без решения системы уравнений (3.38) можно использовать формулу Эрланга

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} / \sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!}, \quad i=0, n, \quad (3.39)$$

в которой  $\alpha$  называют приведенной плотностью потока заявок, которая численно равна среднему числу заявок, приходящихся на среднее время обслуживания одной заявки, т. е.

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot m_{\text{тоб}}.$$

Качественная картина изменения вероятностей  $p_i(t)$ ,  $i=0, n$ , до предельных значений  $p_i$ ,  $i=0, n$ , при  $n=2$  показана на рисунке 3.39.

Используя формулу (3.39) при  $i=n$ , получаем выражение для расчета вероятности того, что поступившая заявка

найдет все каналы заняты-ми (вероятность отказа):

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!}.$$

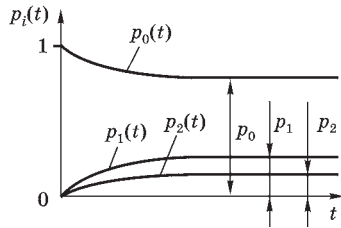


Рис. 3.39

Вероятности состояний  $p_i(t)$  и  $p_i$ ,  $i=0, 1, 2$  системы массового обслуживания с двумя каналами

Вероятность  $Q$  того, что заявка будет обрабатываться системой и характеризующая пропускную способность системы составит

$$Q = 1 - P_{\text{отк}}.$$

В случае  $i=0$  вероятность

$$p_0 = \left( \sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1}$$

характеризует состояние системы, при котором все каналы свободны.

В качестве характеристик СМО часто используют среднее число занятых каналов  $\bar{K}$  и среднее число обслуживаемых заявок  $\bar{B}$  в единицу времени, которые рассчитываются по формулам:

$$\bar{K} = \alpha Q \text{ и } \bar{B} = \lambda Q.$$

Например, в систему с тремя каналами поступают заявки в среднем через 0,4 ч ( $\lambda=2,5 \text{ ч}^{-1}$ ). Среднее время обслуживания одной заявки составляет 0,5 ч ( $\mu=2 \text{ ч}^{-1}$ ). Предполагая, что процесс изменения состояний в системе марковский и заявки, заставшие все каналы занятыми, не обслуживаются (система с отказами), для расчета стационарных вероятностей можно использовать формулу Эрланга (3.39), и в нашем случае

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1}, \quad i = \overline{0, 3}$$

или

$$p_0 = \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1}; \quad p_1 = \alpha p_0; \quad p_2 = \frac{\alpha^2}{2} p_0; \quad p_3 = \frac{\alpha^3}{6} p_0.$$

В результате расчетов для  $\alpha = 1,25$  получаем  $p_0 = 0,2979$ ;  $p_1 = 0,37238$ ;  $p_2 = 0,23274$  и  $p_3 = 0,09697$ .

Таким образом, вероятность того, что заявка не будет обслужена, составляет  $p_3 \approx 0,097$ , а вероятность  $Q$  (обслуживания заявки) составляет  $Q = 1 - p_3 = 0,903$ . Среднее число занятых каналов и среднее число обслуживаемых заявок в час соответственно равны

$$\bar{K} = \alpha Q = 1,129 \quad \text{и} \quad \bar{B} = \lambda Q = 2,2575.$$

Для простейшего входного потока формулы Эрланга могут использоваться при любом законе распределения времени обслуживания. Эти формулы дают также достаточно хорошие результаты, если входной поток имеет незначительное последствие.

Кроме рассмотренных систем с отказами, также широко используются системы с ожиданием. В этих системах, если сообщение застало все каналы занятыми, оно становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов. В случаях, когда время ожидания в очереди не ограничено, то такую систему называют чистой системой с ожиданием. Если ожидание ограничено какими-либо условиями, то систему называют системой смешанного типа. Последний тип систем наиболее часто встречается на практике.

Наиболее часто ограничение накладывается на время ожидания заявки в очереди, которое может быть строго определенным или случайным. При этом начатое обслуживание заявки доводится до конца, независимо от того, сколько времени продолжалось ожидание. В ряде случаев ограничение накладывается не на время ожидания в очереди, а на общее время пребывания заявки в системе. Встречаются смешанные системы, в которых заявка становится в очередь только в случае, если длина очереди не слишком велика, т. е. число заявок в очереди не превышает допустимого значения.

В системах с ожиданием заявки из очереди вызываются на обслуживание в соответствии с правилами, называемыми дисциплиной очереди. Заявки могут вызываться в порядке очереди или в случайном порядке. Дисциплиной очереди может быть предусмотрено обслуживание с преимуществами (приоритетами), когда некоторые заявки имеют предпочтения перед другими.

В качестве примера рассмотрим модель смешанной СМО с  $n$  каналами. На вход поступает простейший поток заявок с плотностью  $\lambda$ , время обслуживания одной заявки  $T_{об}$  показательное с параметром  $\mu=1/m_{об}$ . Заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, время ожидания ограничено сроком  $T_{ож}$ . Если до истечения этого срока заявка не поступает на обслуживание, то она покидает систему необслуженной. Время ожидания  $T_{ож}$  считается случайным и распределенным по показательному закону:

$$h(t)=ve^{-vt}, t > 0,$$

где  $v=1/m_{ож}$  — параметр, равный обратному значению среднего срока ожидания  $m_{ож}=M[T_{ож}]$ .

Параметр  $v$  можно рассматривать как плотность «потока уходов» заявок, стоящих в очереди. При  $v \rightarrow \infty$  смешанная система становится системой с отказами, а при  $v \rightarrow 0$  — чистой системой с ожиданием.

Для составления системы дифференциальных уравнений состояния такой СМО нумеруются с учетом связанных с ней заявок. Заявка называется связанной с системой, если она находится в состоянии обслуживания или ожидает в очереди. При такой нумерации первые  $n+1$  состояния остаются теми же, что в системе с отказами, т. е.  $x_0$  — все каналы свободны (очереди нет);  $x_1$  — занят только один канал (очереди нет); ...;  $x_n$  — заняты все  $n$  каналов (очереди нет), а следующие состояния соответствуют числу состояний, находящихся в очереди:  $x_{n+1}$  — заняты все  $n$  каналов и одна заявка стоит в очереди,  $x_{n+2}$  — заняты  $n$  каналов и две заявки стоят в очереди и т. д.

Так как число заявок, стоящих в очереди, может быть очень большим, то СМО с ожиданием в общем случае имеет бесконечное, хотя и счетное число состояний и бес-

конечное число дифференциальных уравнений для расчета вероятностей  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), p_{n+1}(t), p_{n+2}(t), \dots, p_{n+j}(t), \dots$ . Эта система дифференциальных уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\
 &\vdots \\
 \frac{dp_i(t)}{dt} &= \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \\
 (1 \leq i \leq n-1); \\
 &\vdots \\
 \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + (n\mu + \nu)p_{n+1}(t); \\
 &\vdots \\
 \frac{dp_{n+j}(t)}{dt} &= \lambda p_{n+j-1}(t) - (\lambda + n\mu + j\nu)p_{n+j}(t) + \\
 &\quad + [n\mu + (j+1)\nu]p_{n+j+1}(t), \quad (j \geq 1).
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Обратим внимание на то, что первые  $n$  уравнений в системе (3.40) точно совпадают с первыми  $n$  уравнениями для СМО с отказами (3.37). При  $t \rightarrow \infty$ , т. е. в установившемся режиме обслуживания, система алгебраических уравнений для расчета стационарных вероятностей  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), p_{n+1}(t), \dots, p_{n+j}(t), \dots$  принимает вид:

$$\begin{aligned}
 -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0; \\
 &\vdots \\
 \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu)p_i + (i+1)\mu p_{i+1} &= 0, \quad (1 \leq i \leq n-1); \\
 &\vdots \\
 \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + (n\mu + \nu)p_{n+1} &= 0; \\
 &\vdots \\
 \lambda p_{n+j-1} - (\lambda + n\mu + j\nu)p_{n+j} + [n\mu + (j+1)\nu]p_{n+j+1} &= 0; \\
 &\vdots \\
 \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{j=1}^{\infty} p_{n+j} &= 1.
 \end{aligned}$$

Вычисление стационарных вероятностей удобно производить по следующим конечным формулам:

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} z^{-1}, \quad i \in [0; n]; \quad (3.41)$$

$$p_{n+j} = \left( \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha^j}{\prod_{s=1}^j (n+s\beta)} \right) \cdot z^{-1}, \quad j \in [1; \infty). \quad (3.42)$$

Здесь

$$z = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\prod_{s=1}^j (n+s\beta)}; \quad (3.43)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda m_{об}; \quad \beta = \frac{\nu}{\mu} = \nu m_{об}. \quad (3.44)$$

Заметим, что в (3.41) при  $i=0$   $p_0 = z^{-1}$ .

Используя формулы (3.41)–(3.44), можно рассчитать математическое ожидание числа заявок, находящихся в очереди по формуле

$$m_{оч} = \sum_{j=1}^{\infty} j p_{n+j} = \left( \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j \beta^j}{\prod_{s=1}^j (n+s\beta)} \right) \cdot z^{-1}, \quad (3.45)$$

вероятность наличия очереди

$$P_{оч} = 1 - \sum_{i=0}^n p_i,$$

вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной

$$P_{н} = \left( \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j \alpha^j}{\prod_{s=1}^j (n+s\beta)} \right) \cdot z^{-1}, \quad (3.46)$$

а также пропускную способность системы, т. е. вероятность того, что заявка, попавшая в систему, будет обслужена:

$$Q = 1 - P_n.$$

Трудности применения формул (3.41), (3.42), (3.45) и (3.46) вызывает вхождение в них бесконечных сумм (см. (3.43)). Однако с ростом  $j$  слагаемые в суммах быстро убывают и для оценки ошибки, вызываемой отбрасыванием всех членов сумм, начиная с  $r$ -го, можно использовать формулу

$$\sum_{j=r}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\prod_{s=1}^j (n+s\beta)} < \frac{(\alpha/\beta)^r}{r!} e^{\alpha/\beta}.$$

Необходимо отметить, что в СМО с ожиданием стационарный режим существует, если выполняется условие  $\alpha < n$ , т. е. когда среднее число заявок, приходящееся на время обслуживания одной заявки, не выходит за пределы возможностей системы с  $n$  каналами. В случае  $\alpha \geq n$  число заявок, находящихся в очереди, с увеличением времени  $t$  неограниченно возрастает.

Для СМО с  $\alpha < n$  и в предположении, что  $\beta \rightarrow 0$ , при приближенной оценке вероятностей состояний можно воспользоваться следующими формулами:

$$p_0 = \left( \sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} \right)^{-1};$$

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} p_0, \quad i \in [1; n];$$

$$p_{n+j} = \frac{\alpha^{n+j}}{n!n^j} p_0, \quad j \in [n+1; \infty].$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди при  $\beta \rightarrow 0$ , равно

$$m_{\text{оч}} = \frac{\alpha^{n+1}}{nn! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2} p_0.$$

В завершение рассмотрим СМО с ограничением ожидания по числу заявок, стоящих в очереди. Пусть заявка, за-



ставшая все каналы занятыми, становится в очередь, если в ней находится менее  $m$  заявок, в противном случае заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной. Допущения о простейшем потоке заявок и о показательном распределении времени обслуживания сохраняются. Число состояний такой системы конечно и равно  $n + m + 1$ , т. е.  $x_0$  — все каналы свободны;  $x_i$ ,  $i \in [1, n]$  — занято  $i$  каналов, очереди нет;  $x_{n+j}$ ,  $j \in [1, m]$  — занято  $n$  каналов и  $j$  заявок стоит в очереди. Соответствующая система дифференциальных уравнений записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ &\vdots \\ \frac{dp_i(t)}{dt} &= \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \quad i \in [1; n-1]; \\ &\vdots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t); \\ &\vdots \\ \frac{dp_{n+j}(t)}{dt} &= \lambda p_{n+j-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_{n+j}(t) + n\mu p_{n+j+1}(t), \quad j \in [1; m-1]; \\ &\vdots \\ \frac{dp_{n+m}(t)}{dt} &= \lambda p_{n+m-1}(t) - n\mu p_{n+m}(t). \end{aligned}$$

Для определения стационарных вероятностей состояний решается система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0; \\ &\vdots \\ \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu)p_i + (i+1)\mu p_{i+1} &= 0, \quad i \in [1; n-1]; \\ &\vdots \\ \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + n\mu p_{n+1} &= 0; \\ &\vdots \\ \lambda p_{n+j-1} - (\lambda + n\mu)p_{n+j} + n\mu p_{n+j+1} &= 0, \quad j \in [1; m-1]; \\ \sum_{i=0}^{n+m} p_i &= 1. \end{aligned}$$

Конечные формулы для расчета стационарных вероятностей имеют вид:

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} z_0^{-1}, \quad i \in [0; n];$$

$$p_{n+j} = \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^j \cdot z_0^{-1}, \quad j \in [1; m];$$

$$z_0 = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^j.$$

Вероятность  $P_n$  того, что заявка не будет обслужена, так как в очереди уже стоит  $m$  заявок, равна  $p_{n+m}$ .

Область применения математических моделей и методов теории массового обслуживания непрерывно расширяется. Многие задачи, связанные с системами электронных средств, исследования их эффективности и надежности определяются методами, заимствованными из теории массового обслуживания.

### 3.4.2. Модели надежности

Надежность является одним из важнейших показателей качества ЭС и выражает прежде всего свойство изделия функционировать и сохранять свои параметры в течение определенного срока в заданных условиях. Надежность является комплексным показателем качества, состоящим из ряда частных, таких как безотказность, долговечность, ремонтпригодность, сохраняемость и др.

Математические модели надежности необходимы при проектировании ЭС для выбора наиболее подходящего варианта, который будет обеспечивать эффективное функционирование аппаратуры при ее реальной эксплуатации. Кроме того, модели надежности используются в ходе решения задач диагностики неисправностей, планирования ремонтно-профилактических работ и формирования комплектов запасных частей.

Построение модели надежности начинается с формирования ответов на три основных вопроса:

1. Какие состояния системы приводят к ее отказу?
2. Каков характер процессов возникновения отказов?
3. Какую конфигурацию имеет система?

Ответ на первый вопрос предполагает проведение анализа объекта на предмет выявления таких предельных эксплуатационных режимов, вредных воздействий окружающей среды, ошибок операторов, которые по отдельности или в совокупности приводят к отказу системы, при этом факт возникновения отказа устанавливается соответствующими критериями согласно нормативно-технической документации. Следует иметь в виду, что под отказом понимается событие, заключающееся в нарушении способности ЭС выполнять заданную функцию. Различают частичный, полный, зависимый и независимый отказы. При частичном отказе ЭС может выполнять свои отдельные функции, а полный отказ приводит к полной потере работоспособности. Причиной зависимого отказа ЭС может стать неисправность какого-либо элемента или блока, входящего в состав изделия. Соответственно независимый отказ не вызывается прямо или косвенно каким-либо другим отказом или неисправностью.

Ответ на второй вопрос предусматривает описание процессов возникновения отказов с помощью вероятностных законов и дифференциальных уравнений.

Ответ на третий вопрос связан с определением структуры системы, учитывающей характер соединения компонентов, алгоритм функционирования, наличие резервирования, схему обслуживания и т. п.

Важную роль при рассмотрении надежности играет выделение класса системы по отношению к ремонту и восстановлению. Восстановление — это процесс обнаружения и устранения отказа (повреждения) с целью восстановления его работоспособности. Объект называется восстанавливаемым, если работоспособность его в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях, и невосстанавливаемым — если не подлежит. Один и тот же объект в зависимости от ситуации может быть восстанавливаемым или невосстанавливаемым. Например, аппаратура космического аппарата

на этапе хранения и подготовки к старту — восстанавливаемая, а во время полета — невозстанавливаемая.

Ремонт представляет собой комплекс операций по восстановлению исправности и работоспособности объекта, а также восстановлению ресурса объекта или его составных частей. Заметим, что ресурс (технический ресурс) — наработка объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после среднего или капитального ремонта до наступления предельного состояния. Под наработкой понимается продолжительность или объем работы объекта.

Ремонт объекта может выполняться заменой или восстановлением отдельных элементов и сборочных единиц. Объект называется ремонтируемым, если исправность его в случае возникновения отказа или повреждения подлежит восстановлению, проведение ремонта объекта предусматривается в нормативно-технической документации. Объект, исправность и работоспособность которого в случае возникновения отказа (повреждения) не подлежит восстановлению, — неремонтируемый. Таким образом, понятие «ремонт» предусматривает возможность замены отказавших частей и не увязывается с рассматриваемыми условиями (ситуацией). Классификация объектов по отношению к ремонту и восстановлению приведена на рисунке 3.40.

Основным компонентом модели надежности объекта, т. е. технического изделия (элемента, системы) определенного целевого назначения, рассматриваемого в период



Рис. 3.40

Классификация объектов по ремонту и восстановлению

проектирования, является закон распределения случайного времени  $T$  работы до отказа. Существуют два основных пути определения распределения времени  $T$ . Первый состоит в использовании априорных сведений о надежности элементов системы в виде кривых интенсивностей отказов. Второй метод оперирует с эмпирическими данными, полученными в результате проведения и обработки результатов испытаний, а также при наблюдении за работой различных образцов оборудования в процессе эксплуатации систем, в которых применяются аналогичные элементы, работающие в подобных условиях. При таком подходе по полученным экспериментальным данным строят гистограмму для времени  $T$  и определяют соответствующую функцию распределения отказов. Наиболее предпочтительна комбинация указанных методов, когда для определения распределения времени  $T$  используются достаточные статистические данные и представление о механизме возникновения отказов на основе физико-химических и других соображений.

Знание законов распределения времени работы до отказа и времени ремонта необходимо при расчете показателей надежности систем, т. е. технических характеристик, количественно определяющих одно или несколько свойств, составляющих надежность объекта — безотказность, ремонтпригодность, долговечность и сохраняемость.

Для количественной оценки надежности используют показатели. Неремонтируемые объекты работают до первого отказа, основные показатели надежности которых и формулы оценки показателей по результатам испытаний приведены в таблице 3.5 [3].

Вероятность безотказной работы  $R(t)$  на временном интервале  $[0; t]$  и вероятность отказа  $Q(t)$  (в зарубежной литературе их иногда называют соответственно функциями надежности и ненадежности) определяются непосредственно по функции распределения  $F(t)$  случайного времени наработки до отказа  $T$ , т. е.

$$R(t) \triangleq P[T > t] = 1 - F(t), \quad Q(t) \triangleq P[T \leq t] = F(t).$$

Таблица 3.5

## Показатели надежности и формулы их оценки

Показатели надежности	Формулы оценки
Вероятность безотказной работы — вероятность выполнить заданную функцию при данных условиях в пределах интервала времени $[0; t]$	$\hat{R}(t) = N(t) / N$
Средняя наработка до отказа — математическое ожидание случайной наработки $T$ до первого отказа, ч	$\hat{m}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$
Интенсивность отказов, $1/\text{ч}$ — условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая для рассматриваемого момента $t$ наработки при условии, что до этого момента отказ не возник	$\hat{\lambda}(t) = \frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t}$

Здесь  $N(t)$  — число объектов, работоспособных к моменту времени  $t$ ;  $N$  — число испытываемых объектов;  $T_i$  — наработка до отказа  $i$ -го объекта.

Функциональные связи между показателями  $R(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $m_t$  и плотностью распределения времени до отказа  $\varphi(t)$  приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6

## Связь между показателями надежности

Определяемый показатель надежности	Известный показатель надежности			
	$R(t)$	$Q(t)$	$\varphi(t)$	$\lambda(t)$
$R(t)$	$R(t)$	$1 - Q(t)$	$\int_t^{\infty} \varphi(x) dx$	$\exp \left[ - \int_0^t \lambda(x) dx \right]$
$Q(t)$	$1 - R(t)$	$Q(t)$	$\int_t^{\infty} \varphi(x) dx$	$1 - \exp \left[ - \int_0^t \lambda(x) dx \right]$
$\varphi(t)$	$-\frac{d}{dt} R(t)$	$\frac{d}{dt} Q(t)$	$\varphi(t)$	$\lambda(t) \exp \left[ - \int_0^t \lambda(x) dx \right]$
$\lambda(t)$	$-\frac{1}{R(t)} \frac{d}{dt} R(t)$	$\frac{1}{1 - Q(t)} \frac{d}{dt} Q(t)$	$\frac{\varphi(t)}{\int_t^{\infty} \varphi(x) dx}$	$\lambda(t)$
$m(t)$	$\int_0^{\infty} R(t) dt$	$\int_0^{\infty} [1 - Q(t)] dt$	$\int_0^{\infty} t \varphi(t) dt$	$\int_0^{\infty} \exp \left[ - \int_0^t \lambda(x) dx \right] dt$

Вероятность безотказной работы в течение интервала  $[t_1; t_2]$  определяется по формуле

$$R(t_1, t_2) = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} = \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right].$$

Конкретный вид функций  $P(t)$ ,  $\lambda(t)$  определяется законом распределения случайной наработки до отказа  $T$ . Во многих случаях на практике функция  $\lambda(t)$  имеет вид, показанный на рисунке 3.41.

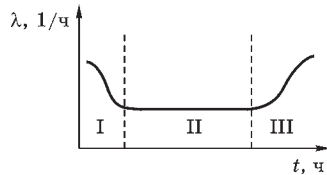


Рис. 3.41 Вид функции  $\lambda(t)$

Здесь можно выделить участки приработки (I), нормальной работы (II) и «старения» (III). Иногда как показатель рассматривают среднюю интенсивность отказов  $\bar{\lambda}$  за время, соответствующее техническому ресурсу  $t_p$ , т. е.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} \lambda(t) dt, \tag{3.47}$$

а также суммарную наработку  $t_n$  до начала массовых параметрических отказов, которые характеризуются отклонением значения хотя бы одного рабочего параметра за пределы допуска.

Если система состоит из  $n$  элементов и отказ любого из них приводит к отказу всей системы, то такое соединение элементов в смысле надежности называется последовательным. Показатели надежности систем по известным характеристикам элементов в предположении, что они соединены последовательно, рассчитываются по следующим формулам.

Вероятность безотказной работы  $R(t)$  системы на временном интервале  $[0; t]$  равна произведению вероятностей безотказной работы  $R_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  элементов, т. е.

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t), \tag{3.48}$$

или для отрезка времени  $[t_0, t_0 + \tau]$ :

$$R(t_0, t_0 + \tau) = \prod_{i=1}^n R_i(t_0, t_0 + \tau). \quad (3.49)$$

Интенсивность отказов  $\Lambda(t)$  системы равна сумме интенсивностей отказов  $\lambda_i(t)$  элементов, т. е.

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (3.50)$$

Плотность вероятности  $f(t)$  времени работы до отказа системы определяется по формуле

$$f(t) = R(t) \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(t)}{R_i(t)}, \quad (3.51)$$

где  $\varphi_i(t)$  — плотность вероятности отказов  $i$ -го элемента.

Среднее время  $m_t$  работы системы до отказа при сроке службы  $t_{\text{сл}}$  рассчитывается следующим образом:

$$m_t = \left( \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \right)^{-1}; \quad \bar{\lambda}_i = \frac{1}{t_{\text{сл}}} \int_0^{t_{\text{сл}}} \lambda_i(t) dt.$$

Если для элементов имеет место показательный закон распределения времени работы до отказа, т. е. выполняется условие экспоненциального закона надежности, то формулы (3.48)–(3.51) принимают следующий вид:

$$R(t) = e^{-\Lambda t}; \quad R(t_0, t_0 + \tau) = e^{-\Lambda \tau}; \quad \Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i; \quad f(t) = \Lambda e^{-\Lambda t}; \quad m_t = \frac{1}{\Lambda}.$$

Значительная доля отказов систем связана с выходом ее параметров за пределы допуска, т. е. установленные расчетом или экспериментально границы, при которых объект способен выполнять заданные функции. Задача установления допусков с учетом требований надежности и проверка их обеспечения является одной из наиболее сложных и ответственных при проектировании систем и анализе метрологических характеристик ЭС [3].

Конструируемый объект обычно характеризуется рядом параметров, от значений которых зависит качество

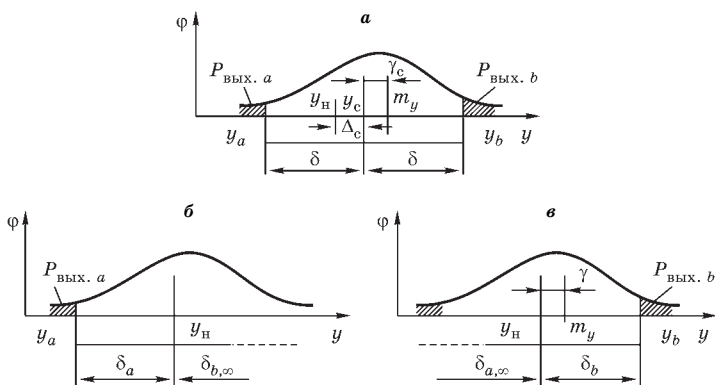


его функционирования. К таким параметрам относятся характеристики элементов, модулей, узлов, блоков, системы в целом. Например, размеры детали, омическое сопротивление резистора, емкость конденсатора, коэффициент усиления и т. д. Значение параметра зависит от большого числа факторов, поэтому его рассматривают как случайную величину.

Область допустимого изменения параметра называется допусковой областью, обозначим ее  $S_d$ . Для  $n$ -мерного вектора параметров  $y=(y_1, \dots, y_n)$  область  $S_d$  является  $n$ -мерным параллелепипедом. Условие  $y \in S_d$ , т. е. что значение  $y$  принадлежит допусковой области, проверяется выполнением соотношений  $y_{i,a} < y_i < y_{i,b}$ ,  $i = 1, n$ , где  $y_{i,a}$ ,  $y_{i,b}$  — граничные значения для составляющей  $y_i$ . Выход вектора  $y$  из области  $S_d$  рассматривается как отказ объекта. Наряду с областью  $S_d$  может вводиться область работоспособного состояния  $S_p$  такая, что

$$S_d \subset S_p. \tag{3.52}$$

Из соотношения (3.52) следует, что применение области  $S_d$  вместо  $S_p$  при вычислении показателей надежности дает некоторую избыточность получаемых результатов. Допуски делятся на две основные группы — двусторонние и односторонние (рис. 3.42а–в).



**Рис. 3.42**  
Допуски:

а — двусторонний; б, в — односторонние.

В одномерном случае область  $S_d$  определяется следующими характеристиками: поле допуска  $2\delta$ , нижняя  $y_a$  и верхняя  $y_b$  границы поля допуска, середина поля допуска  $y_c$ , номинальное значение параметра  $y_n$  и смещение  $y_c$  относительно номинального значения  $\Delta_c$ . Эти характеристики связаны соотношениями:

$$\delta = (y_b - y_a)/2, y_c = (y_a + y_b)/2, \Delta_c = y_c - y_n.$$

При анализе системы могут решаться прямая и две обратные задачи, которые связаны с сопоставлением распределения параметра  $y$  и характеристик поля допуска.

В случае прямой задачи задается закон распределения параметра  $y$ , например в виде плотности вероятности  $\varphi(y)$ , и поле допуска, характеризуемое параметрами  $y_a$ ,  $y_b$  и  $y_c$ . Требуется определить вероятность выхода параметра из допусковой области, т. е.  $P[y \notin S_d] = P_{\text{вых}}$ .

При первой обратной задаче задается плотность  $\varphi(y)$  и допустимая вероятность  $P_{\text{вых.д}}$ . Требуется определить характеристики поля допуска такие, чтобы для них выполнялось условие

$$P_{\text{вых}} \leq P_{\text{вых.д}}. \quad (3.53)$$

Во второй обратной задаче по известным характеристикам поля допуска и допустимой вероятности  $P_{\text{вых.д}}$  надо определить характеристики распределения  $y$ , при которых будет выполняться условие (3.53).

В основе решения этих задач лежат следующие формулы расчета вероятности  $P_{\text{вых}}$ , соответствующие трем случаям, приведенным на рисунке 3.42:

$$\begin{aligned} P_{\text{вых}} &= P_{\text{вых.ab}} = P_{\text{вых.a}} + P_{\text{вых.b}} = \\ &= 1 - \int_{y_a}^{y_b} \varphi(y) dy = 1 - \int_{y_n + \Delta_c - \delta}^{y_n + \Delta_c + \delta} \varphi(y) dy; \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$P_{\text{вых}} = P_{\text{вых.a}} = 1 - \int_{y_n - \delta_a}^{\infty} \varphi(y) dy; \quad (3.55)$$

$$P_{\text{вых}} = P_{\text{вых.b}} = 1 - \int_{-\infty}^{y_n + \delta_b} \varphi(y) dy. \quad (3.56)$$

Исследования показывают, что в большинстве случаев распределение значения параметра  $y$  по полю допуска для фиксированного момента времени близко к нормальному. При нормальном законе распределения  $y$  формулы (3.54)–(3.56) для расчета  $P_{\text{вых}}$  принимают следующий вид:

$$P_{\text{вых}.ab} = 1 - \left[ \Phi \left( \frac{y_b - m_y}{\sigma_y} \right) - \Phi \left( \frac{y_a - m_y}{\sigma_y} \right) \right];$$

$$P_{\text{вых}.a} = \Phi \left( \frac{y_a - m_y}{\sigma_y} \right); \quad P_{\text{вых}.b} = 1 - \Phi \left( \frac{y_b - m_y}{\sigma_y} \right),$$

где  $m_y$ ,  $\sigma_y$  — математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины  $y$ ;  $\Phi(z)$  — функция распределения нормального закона ( $m=0$ ,  $\sigma=1$ ), т. е.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx.$$

В ряде случаев закон распределения  $y$  принимается равномерным, т. е.

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1/2h, & y \in [m_y - h, m_y + h]; \\ 0, & y \in [m_y - h, m_y + h]; \end{cases} \quad (3.57)$$

$$m_y = (y_{\text{max}} + y_{\text{min}}) / 2, \quad \sigma_y = h / \sqrt{3},$$

где  $h$  — максимальное отклонение  $y$  от математического ожидания  $m_y$ ;  $y_{\text{max}}$ ,  $y_{\text{min}}$  — минимальное и максимальное значения  $y$  соответственно.

Расчет вероятностей  $P_{\text{вых}}$  при распределении (3.57) производится по формулам (3.54)–(3.56) с учетом границ изменения параметра. Например, при  $y_{\text{min}} < y_a$  и  $y_{\text{max}} < y_b$  (рис. 3.43а) формула (3.54) для двустороннего допуска принимает вид

$$P_{\text{вых}.ab} = 1 - \mathcal{P}[y \in [y_a; m_y + h]] = 1 - \int_{y_a}^{m_y+h} \frac{1}{2h} dy = \frac{y_a + h - m_y}{2h}.$$

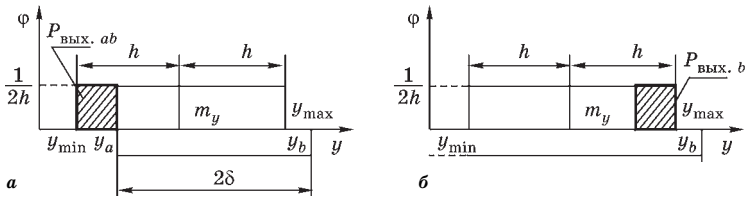


Рис. 3.43

Равномерное распределение параметра и поля допуска:

*a* — двусторонний допуск; *б* — односторонний допуск.

В случае одностороннего допуска с верхней конечной границей и  $y_b < y_{\max}$  (рис. 3.43б) на основе (3.56) получаем

$$P_{\text{вых.}b} = 1 - \mathcal{P}[y > y_b] = 1 - \int_{y_b}^{m_y+h} \frac{1}{2h} dy = \frac{m_y + h - y_b}{2h}.$$

Во многих случаях на практике законы распределения параметров отличаются от нормального или равномерного и обычно асимметричны. В этих случаях рассчитываются координаты середины и границы поля рассеивания параметра на основе известных распределений влияющих на него факторов и затем решаются другие задачи.

При проектировании ЭС часто решается следующая задача аналитического определения погрешности. Задаются векторы входных (первоначальных)  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и выходных  $y = (y_1, \dots, y_m)$  конструкторских параметров. Связь между  $x$  и  $y$  описывается системой уравнений  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, m$ .

Требуется для заданных ошибок входов определить погрешности для выходных параметров.

Для одномерного случая (со скалярными входом и выходом), т. е.

$$y = f(x), \quad (3.58)$$

в предположении непрерывности функции (3.58) абсолютные  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и относительные  $\delta x$ ,  $\delta y$  погрешности в первом приближении связаны соотношениями:

$$\Delta y \approx k \Delta x; \quad k = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x);$$

$$\delta_y \approx k_{\delta} \delta x; \quad k_{\delta} = f'(x) \frac{x}{f(x)}; \quad \delta_x = \frac{\Delta x}{x}; \quad \delta_y = \frac{\Delta y}{y},$$

где  $k$ ,  $k_{\delta}$  — коэффициенты влияния соответственно абсолютной и относительной ошибок первичного конструкторского параметра на ошибку выхода. Эти коэффициенты определяются по производной  $f'(x)$  для конкретного значения  $x$ , например  $m_x$ , или экспериментально для измеренных значений  $(x_v, y_v)$ ,  $(x_{\mu}, y_{\mu})$  по формулам:

$$\hat{k} = \frac{y_v - y_{\mu}}{x_v - x_{\mu}}; \quad \hat{k}_{\delta} = \hat{k} \frac{\bar{x}}{\bar{y}}; \quad \bar{x} = \frac{x_v + x_{\mu}}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_v + y_{\mu}}{2}.$$

В предположении, что функция  $n$  аргументов

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.59)$$

непрерывна и среди случайных погрешностей входов нет доминирующих, ошибки  $\Delta y$  и  $\delta_y$  приближенно определяются с использованием соотношений

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^n k_i \Delta x_i, \quad k_i = f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n);$$

$$\delta y \approx \sum_{i=1}^n k_{\delta_i} \delta x_i; \quad k_{\delta_i} = f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \frac{x_i}{f(x_1, \dots, x_n)} = k_i \frac{m_{x_i}}{m_y},$$

где  $\Delta x_i$ ,  $\delta x_i$  — погрешности  $i$ -го входного конструкторского параметра  $x_i$ ;  $k_i$ ,  $k_{\delta_i}$  — коэффициенты влияния соответствующих погрешностей  $x_i$  на выходной параметр  $y$ ;  $m_y$ ,  $m_x$  — математические ожидания  $y$  и  $x$ .

Отклонения  $\beta_{x_i}$ ,  $i = 1, n$  первичных параметров конструкции  $x_i$  от номинальных значений удобно выразить через систематические  $\Delta_i$  и случайные  $\beta_i$  составляющие в виде

$$\beta_{x_i} = \Delta_i \pm \beta_i. \quad (3.60)$$

Систематическая ошибка  $\Delta_i$  определяется алгебраическим суммированием составляющих, обусловливаемых

воздействием различных факторов — температуры, давления и т. д. Если число факторов  $N$  и систематическая ошибка, вызываемая  $j$ -м фактором на параметр  $x_i$ , равна  $\Delta_{ij}$ , то

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}. \quad (3.61)$$

Случайные составляющие складываются по правилу дисперсий, т. е.

$$\beta_i = \left( \sum_{j=1}^N \beta_{ij}^2 \right)^{0,5}, \quad (3.62)$$

где  $\beta_{ij}$  — случайная составляющая ошибки, вызываемая  $j$ -м фактором.

Отклонение выходного параметра конструкции с учетом (3.59)–(3.62) определяется по формуле

$$\beta_y = \sum_{i=1}^n k_i \Delta_i \pm \left[ \sum_{i=1}^n (k_{\delta,i} v_i \beta_i)^2 \right]^{0,5},$$

где  $v_i$  — коэффициент, характеризующий отклонение распределения случайной составляющей ошибки  $x_i$  от нормального.

Расчет экстремальных отклонений  $\Delta \tilde{y} = y - m_y$  по абсолютным отклонениям  $\Delta \tilde{x}_i = x_i - m_x$ ,  $i = \overline{1, n}$  при

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) > 0, i = \overline{1, n_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) < 0, i = \overline{(n_1 + 1), n}$$

производится по формулам:

$$\Delta \tilde{y}_{\max} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta \tilde{x}_i^{\max} + \sum_{i=n_1+1}^{n_1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta \tilde{x}_i^{\min};$$

$$\Delta \tilde{y}_{\min} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta \tilde{x}_i^{\min} + \sum_{i=n_1+1}^{n_1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta \tilde{x}_i^{\max}.$$

В ряде случаев требуется найти закон распределения выходного конструкторского параметра по известным

распределениям входных параметров. Для одномерного объекта (3.58) в предположении, что обратная зависимость  $x=f^{-1}(y)=g(y)$  однозначна, плотность распределения  $\varphi_y(y)$  случайной величины  $y$  по известной плотности распределения  $\varphi_x(x)$  случайной величины  $x$  определяется по формуле

$$\varphi_y(y) = \varphi_x(g(y)) \left| \frac{d}{dy} g(y) \right|.$$

Математическое ожидание и дисперсия  $y$  соответственно равны

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_x(x) dx;$$

$$D_y = \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - m_y]^2 \varphi_x(x) dx.$$

В таблице 3.7 представлены плотности распределения  $\varphi_y(y)$  для некоторых распространенных функций  $y=f(x)$  и  $y=f(x, z)$ .

Таблица 3.7

**Плотности распределения функций случайных аргументов**

Функции $y=f(x)$ , $y=f(x, z)$	Плотность распределения $\varphi_y(y)$
$y=a+bx$	$\varphi_y(y) = \frac{1}{ b } \varphi_x\left(\frac{y-a}{b}\right)$
$y = \frac{1}{x}$	$\varphi_y(y) = \frac{1}{y^2} \varphi_x\left(\frac{1}{y}\right)$
$y=e^x$	$\varphi_y(y) = \frac{1}{y} \varphi_x(\ln y)$
$y=\ln x$	$\varphi_y(y) = e^y \cdot \varphi_x(e^y)$
$y=x^2$	$\varphi_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [\varphi_x(\sqrt{y})] + \varphi_x(-\sqrt{y})$
$y=x+z$	$\varphi_y(y) = \int \varphi_x(v) \cdot \varphi_z(y-v) dv = \int \varphi_x(y-v) \cdot \varphi_z(v) dv$
$y=xz$	$\varphi_y(y) = \int \left  \frac{1}{v} \right  \varphi_x(v) \cdot \varphi_z\left(\frac{y}{v}\right) dv = \int \left  \frac{1}{v} \right  \varphi_x\left(\frac{y}{v}\right) \cdot \varphi_z(v) dv$
$y = \frac{x}{z}$	$\varphi_y(y) = \int  v  \varphi_x(v) \cdot \varphi_z(y-v) dv = \int \left  \frac{v}{y^2} \right  \varphi_x(v) \cdot \varphi_z\left(\frac{v}{y}\right) dv$

При большом числе случайных аргументов аналитическое определение плотности  $\varphi_y(y)$  в общем случае достаточно громоздко, поэтому обычно ограничиваются определением основных моментов распределения выхода  $y$ . Математическое ожидание и дисперсия выходного параметра  $y$  как функции  $n$  случайных независимых аргументов  $(x_1, \dots, x_n)$  определяются по формулам:

$$m_y = f(m_{x_1}, \dots, m_{x_n}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} D_{x_i};$$

$$D_y = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 D_{x_i} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \mu_{3x_i},$$

где производные  $\partial f / \partial x$  берутся в точках  $m_{x_i}, i = \overline{1, n}$ ;  $\mu_{3x_i}$  — третий центральный момент  $x_i, i = \overline{1, n}$ .

В случаях, когда входные величины  $x_i, i = \overline{1, n}$ , коррелированы, в формулах для  $m_y, D_y$  добавляются слагаемые с корреляционными моментами, например:

$$m_y = f(m_{x_1}, \dots, m_{x_n}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} D_{x_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) R_{i,j},$$

где  $R_{i,j}$  — корреляционный момент между  $x_i$  и  $x_j$ , т. е.

$$R_{i,j} = M[(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})].$$

Если в модели (3.59)  $n$  велико и среди входных переменных  $x_i, i = \overline{1, n}$  нет резко выделяющихся по влиянию на выходной параметр  $y$ , то имеет место распределение, близкое к нормальному.

Для ремонтируемых объектов важным показателем надежности является параметр потока отказов  $\omega(t)$ . Для ординарных потоков без последствия применительно к ремонтируемым невосстанавливаемым системам параметр потока отказов (рис. 3.44а) совпадает с интенсивностью потока и представляет собой отношение среднего числа отказов за произвольную малую его наработку к значению этой наработки, т. е.



$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[r(t, t + \Delta t)]}{\Delta t},$$

где  $r(t, t + \Delta t)$  — число отказов за интервал  $(t, t + \Delta t)$ ;  $M[X]$  — математическое ожидание случайной величины  $X$ .

Среднее значение параметра потока отказов  $\bar{n}$  определяется по формуле, аналогичной (3.47). Если при  $t \rightarrow \infty$  плотность вероятности  $\varphi(t) \rightarrow 0$ , то существует установившееся значение параметра потока отказов

$$\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \frac{1}{\tilde{m}_t}.$$

В случае экспоненциального распределения наработки между отказами с параметром  $\lambda$  имеет место

$$\omega(t) = \lambda; R(t, t + \tau) = R(\tau) = e^{-\lambda\tau}; \quad \tilde{m}_t = \frac{1}{\lambda},$$

где  $R(t, t + \tau)$  — вероятность безотказной работы на интервале  $[t, t + \tau]$ ;  $\tilde{m}_t$  — средняя наработка между отказами.

Для ремонтируемых восстанавливаемых (обслуживаемых) объектов при их использовании в течение заданного времени работы  $[t_1, t_k]$  допускаются отказы и вызванные ими кратковременные перерывы в работе. В процессе эксплуатации такого объекта чередуются случайные периоды времени безотказной работы  $T^{(i)}$  и времени восстановления (ремонта)  $T_B^{(i)}$  (рис. 3.44б), т. е. имеет место альтернирующий процесс функционирования объекта.

Надежность объектов данного класса характеризуется рядом комплексных (коэффициенты готовности, оперативной готовности, технического использования, характеризующих безотказность и ремонтпригодность)

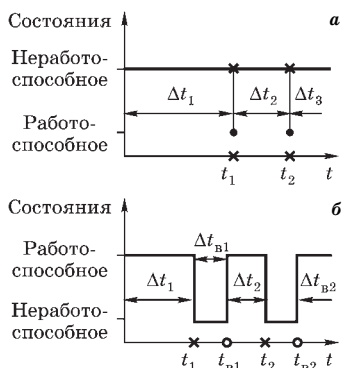


Рис. 3.44

Поток отказов (а)  
и реализация случайного  
процесса эксплуатации  
восстанавливаемого объекта (б)

и единичных ( $m_t, R(t, t + \tau)$ , характеризующих безотказность, или среднее время восстановления, характеризующее ремонтпригодность) показателей.

Нестационарный коэффициент, или функция готовности, есть вероятность того, что в момент времени  $t$  объект находится в состоянии работоспособности (при известных начальных условиях в момент  $t=0$ ). На основе проведения испытаний с  $N$  объектами функция готовности оценивается по формуле

$$\hat{K}_r(t) = N(t) / N,$$

где  $N(t)$  — число объектов, находящихся в момент времени  $t$  в состоянии работоспособности.

Стационарный коэффициент готовности представляет собой вероятность нахождения объекта в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов простоя, он равен предельному значению  $K_r(t)$ , т. е.

$$K_r = \lim_{t \rightarrow \infty} K_r(t) = \frac{\tilde{m}_t}{\tilde{m}_t + m_B},$$

где  $\tilde{m}_t$  — средняя наработка между отказами (наработка на отказ);  $m_B$  — среднее время восстановления объекта.

Для ремонтируемых систем, состоящих из  $n$  узлов и в предположении, что ремонт отказавшего узла производится независимо от состояний работоспособности других узлов, расчет коэффициента готовности выполняется по формуле

$$K_r(t) = \prod_{i=1}^n K_{ri}(t),$$

где  $K_{ri}(t)$  — коэффициент готовности  $i$ -го узла.

С показателями  $K_r(t)$  и  $K_r$  жестко связаны функция  $K_n(t)$  и коэффициент  $K_n$  простоя (рис. 3.45а):

$$K_n(t) = 1 - K_r(t), \quad K_n = 1 - K_r.$$

Нестационарный коэффициент оперативной готовности  $K_{op}(t, t + \tau)$  есть вероятность того, что объект окажется работоспособным в момент времени  $t$  и, начиная с этого

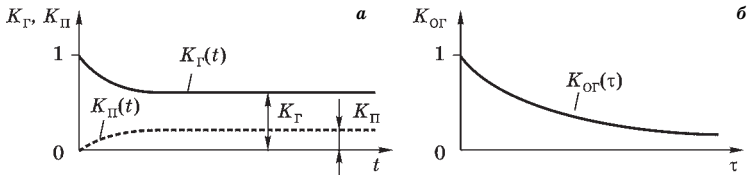


Рис. 3.45  
Показатели надежности:

а —  $K_Г(t)$ ,  $K_Г$ ,  $K_П(t)$  и  $K_П$ ; б —  $K_ОР(\tau)$ .

момента, проработает безотказно в течение заданного времени  $\tau$ , он оценивается по формуле

$$\hat{K}_{ОР}(t, t + \tau) = N(t, t + \tau) / N,$$

где  $N(t, t + \tau)$  — число объектов, работоспособных в момент времени  $t$  и проработавших безотказно до момента времени  $t + \tau$ .

Стационарный коэффициент оперативной готовности определяется как вероятность безотказной работы объекта в течение заданного интервала времени  $\tau$ , начиная с произвольного «достаточно удаленного» момента времени, т. е.

$$K_{ОР}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{ОР}(t, t + \tau) \text{ или } K_{ОР}(\tau) = K_Г R(\tau).$$

Предполагается, что вероятность безотказной работы в течение времени  $\tau$  не зависит от момента начала работы. На рисунке 3.45б показан вид функции  $K_{ОР}(\tau)$ .

Для учета всех простоев объекта, в том числе и не связанных с отказами, используется коэффициент технического использования. Он представляет собой отношение математического ожидания времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к сумме математических ожиданий времени пребывания объекта в работоспособном состоянии, времени простоев, обусловленных техническим обслуживанием, и времени ремонтов за тот же период эксплуатации, т. е.

$$K_{ТИ} = \frac{t_{\text{раб}}}{t_{\text{раб}} + t_{\text{рем}} + t_{\text{обсл}}},$$

где  $t_{\text{раб}}$  — суммарное время нахождения объекта в работоспособном состоянии;  $t_{\text{рем}}$  — суммарное время ремонта;  $t_{\text{обсл}}$  — суммарное время профилактического обслуживания.

Показатели ремонтпригодности восстанавливаемых объектов представляют собой характеристики случайной величины  $\theta$  длительности восстановления. Широко используются такие показатели ремонтпригодности, как вероятность восстановления за интервал времени  $[0; t]$ :

$$P_{\text{в}}(t) = \mathcal{P}[\theta \leq t] = F_{\text{в}}(t)$$

и среднее время восстановления:

$$m_{\text{в}} = M[\theta] = \int_0^{\infty} t \varphi_{\text{в}}(t) dt,$$

где  $F_{\text{в}}(t)$ ,  $\varphi_{\text{в}}(t)$  — функция и плотность распределения времени  $\theta$ .

Если время  $\theta$  имеет показательное распределение с параметром  $\mu$ , т. е.  $\varphi_{\text{в}}(t) = \mu \exp[-\mu t]$ , то

$$P_{\text{в}}(t) = 1 - e^{-\mu t}; \quad m_{\text{в}} = \frac{1}{\mu}.$$

Стационарный коэффициент готовности при показательных распределениях времени работы между отказами  $T$  и времени восстановления  $\theta$  с параметрами соответственно  $\lambda$  и  $\mu$  рассчитывается по формуле

$$K_{\text{г}} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Для повышения надежности ремонтируемых восстанавливаемых объектов, не допускающих перерывов в работе (обычно из-за опасных последствий отказов), вводится резервирование, при этом отказавший элемент может ремонтироваться во время работы резервного. Для таких объектов в основном используются те же показатели надежности, что и для ремонтируемых невосстанавливаемых объектов. Различают пять видов резервирования:

1) структурное (аппаратное), предусматривающее использование избыточных структурных элементов (электронных модулей);

- 2) временное (с применением резерва времени);
- 3) нагрузочное (используется запас по нагрузке);
- 4) функциональное (компоненты с избыточными функциями);
- 5) информационное (избыточность приема, передачи и хранения информации).

Наиболее часто используются структурное и временное резервирование. Под структурным резервированием понимается метод повышения надежности системы, предусматривающий использование избыточных структурных элементов. Классификация способов реализации структурного резервирования приведена в таблице 3.8.

Таблица 3.8

Классификация способов структурного резервирования

Признак классификации	Способ резервирования	Описание
Способ включения резерва	Постоянное резервирование	Резервные элементы участвуют в функционировании наравне с основным
	Резервирование замещением	Функции основного элемента передаются резервным элементам после его отказа
Схема включения резерва	Общее резервирование	Резерв предусматривается на случай отказа объекта в целом
	Раздельное резервирование	Резерв предусматривается на случай отказов отдельных элементов или их групп
Состояние резерва	Ненагруженный резерв	Резервные элементы практически не несут нагрузок
	Облегченный резерв	Резервные элементы находятся в менее нагруженном режиме, чем основной
	Нагруженный резерв	Резервные элементы работают в том же режиме, что и основной элемент
Однородность резервирования	Однородное резервирование	Резервирование имеет один вид по соответствующему признаку классификации
	Смешанное резервирование	Совмещение в объекте различных видов резервирования
Кратность резервирования	Однократное резервирование	Кратность резервирования равна единице (дублирование)
	Многократное резервирование	Кратность резервирования свыше единицы

Элемент (узел), минимально необходимый для выполнения системой заданных функций, называется основным или рабочим, элементы, обеспечивающие работоспособность системы в случае отказа основного элемента, — резервными. На структурной схеме расчета надежности резервные элементы размещаются параллельно основному. Резервные элементы могут иметь соединение с основным элементом без переключателя и с переключателем, как показано на рисунке 3.46а, б [3].

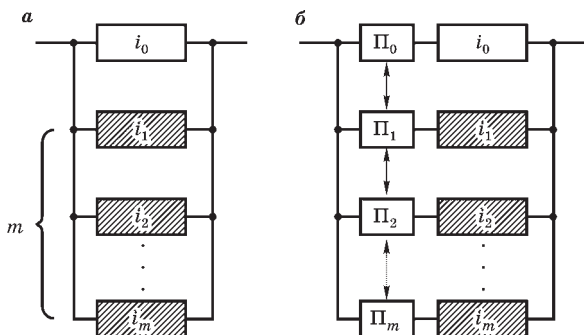


Рис. 3.46

Параллельное соединение элементов в структурной схеме надежности: а — нагруженный резерв; б — ненагруженный резерв с переключателями.

Для невозстанавливаемой системы вероятность  $R_{i(m)}(t)$  безотказной работы  $i$ -го узла на интервале времени  $[0; t]$  при  $m$ -кратном нагруженном резерве (без переключателей) определяется по формуле

$$R_{i(m)}(t) = 1 - \prod_{j=0}^m [1 - R_{ij}(t)],$$

где  $R_{0j}(t)$ ,  $R_{ij}(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$  — вероятности безотказной работы основного и  $j$ -го резервного элементов соответственно.

В данном случае отказ  $i$ -го узла наступает, когда выйдут из строя все  $m + 1$  элементы. Если основной и резервные элементы, работающие в одном режиме, одинаковы, то

$$R_{i(m)}(t) = 1 - [1 - R_{ij}(t)]^{m+1}.$$

Средняя наработка до отказа  $i$ -го резервируемого узла равна

$$T_{1i(m)} = \int_0^{\infty} R_{i(m)}(t) dt.$$

Если отключение и подключение элементов при резервировании выполняется с помощью переключателей  $\Pi_j$  (рис. 3.46б), то

$$R_{i(m)}(t) = 1 - \prod_{j=0}^m [1 - R_{\Pi_j}(t) \cdot R_{ij}(t)],$$

где  $R_{\Pi_j}(t)$  — вероятность безотказной работы  $j$ -го переключателя.

При экспоненциальном распределении времени работы основного и  $m$  резервных элементов с параметром  $\lambda$  для вероятности  $R_{i(m)}(t)$  и среднего времени до отказа имеют место соотношения:

$$R_{i(m)}(t) \geq 1 - (\lambda t)^{m+1};$$

$$m_{ti(m)} = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m+1} \right).$$

Недостатком нагруженного резерва является одновременная работа всех  $m+1$  элементов, и следовательно, их повышенный износ. В случаях, когда допустимы перерывы в работе системы, необходимые для замены основного элемента резервным, более экономичными являются облегченный и ненагруженный виды резерва, т. е. резервы замещением.

При ненагруженном резерве без восстановления средняя наработка до отказа группы равна сумме средних работ всех элементов, т. е.

$$T_{1i(m)} = \sum_{j=0}^m m_{1ij}.$$

В случае экспоненциального распределения времени работы элементов с параметром  $\lambda_i$  вероятность  $R_{i(m)}(t)$  при ненагруженном резерве определяется по формуле

$$R_{i(m)}(t) = e^{-\lambda_i t} \sum_{j=0}^m \frac{(\lambda_i t)^j}{j!}.$$

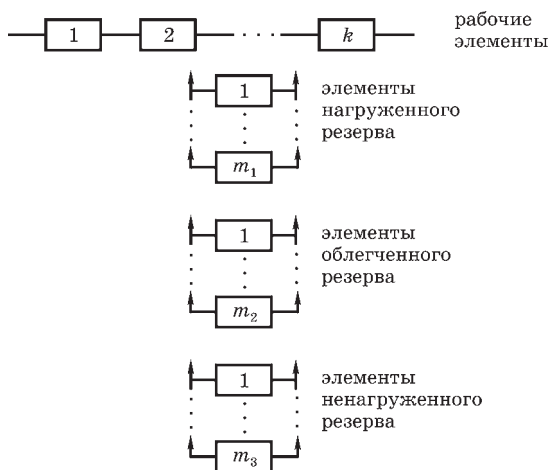
Следует заметить, что при резерве замещением может потребоваться использование переключающих устройств (см. рис. 3.46б).

Для восстанавливаемых систем, когда в процессе функционирования могут восстанавливаться основные и резервные элементы при построении модели надежности, необходимо учитывать число  $k$  рабочих элементов в группе, которая резервируется, состав резервных элементов и показатель обслуживания  $r$ , т. е. сколько элементов может одновременно восстанавливаться. Схема такой системы представлена на рисунке 3.47, а сокращенно ее модель обозначается кортежем

$$\langle k, m_1, m_2, m_3, r \rangle,$$

где  $m_1$ ,  $m_2$ , и  $m_3$  — числа резервных элементов соответственно в нагруженном, облегченном (характеризуется показателем  $0 < v < 1$ ) и ненагруженном состояниях.

Данная система с  $m = m_1 + m_2 + m_3$  резервными элементами работает следующим образом. Если при функционировании отказывает один из  $k$  рабочих элементов, то он замещается резервным элементом, находящимся в нагруженном состоянии. Отказавший элемент поступает на восстановление, место восстанавливаемого элемен-



**Рис. 3.47**  
Структурная  
схема надежности  
системы



та из числа  $m_1$  занимает элемент из группы  $m_2$ , а группа  $m_2$  пополняется из  $m_3$ . Данное состояние системы обозначается  $x_1$ , т. е. имеется один отказавший элемент. Из состояния  $x_1$  система может вернуться в состояние  $x_0$ , если отказавший элемент будет восстановлен (он пополнит группу  $m_3$ ), или перейти в состояние  $x_2$ , если откажет еще один элемент, и т. д. Следует заметить, отказы могут не только рабочие элементы, но и элементы из групп  $m_1$  и  $m_2$ . Отказ системы  $\langle k, m_1, m_2, m_3, r \rangle$  наступает при достижении состояния  $x_{m+1}$ , т. е. когда в состоянии отказа будут находиться  $m_1 + m_2 + m_3 + 1$  элементов.

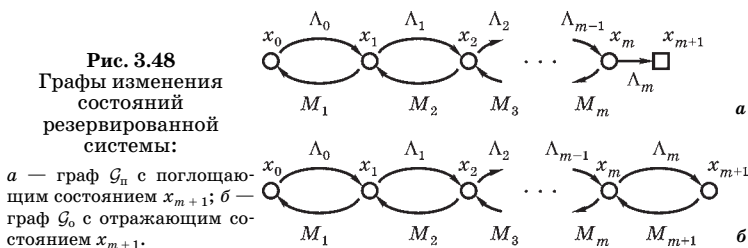
Если время работы элементов до отказа и время восстановления показательные с параметрами  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно, то для решения задач моделирования кортеж состава  $\langle k, m_1, m_2, m_3, r \rangle$  дополняется кортежем интенсивностей отказов и восстановления  $\langle \lambda, \lambda, \nu\lambda, 0, \mu \rangle$ . Для расчета вероятности безотказной работы  $R(t)$  системы, представленной на рисунке 3.47, составляется ориентированный граф  $\mathcal{G}_n$  изменения состояний системы с поглощающим состоянием  $x_{m+1}$  (рис. 3.48а).

По графу  $\mathcal{G}_n$  в предположении, что процесс изменения состояний марковский, записывается система из  $m+2$  дифференциальных уравнений. Интенсивности дуг  $\Lambda_j$  графа, связанные с отказами элементов, определяются из соотношения:

$$\Lambda_j = \begin{cases} k\lambda + m_1\lambda + m_2\nu\lambda, & j = \overline{0, m_3}; \\ k\lambda + m_1\lambda + (m_2 - (j - m_3))\nu\lambda, & j = \overline{m_3 + 1; m_2 + m_3}; \\ k\lambda + (m_1 - (j - m_2 - m_3))\lambda, & j = \overline{m_2 + m_3 + 1; m}, \end{cases}$$

а интенсивности дуг  $M_j$ , связанные с восстановлением:

**Рис. 3.48**  
Графы изменения состояний резервированной системы:



$$M_j = \begin{cases} j\mu, & j \leq r, \\ r\mu, & j > r. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений для расчета вероятностей состояний  $p_j(t)$ ,  $j = 0, m+1$ , в компактной форме может быть записана следующим образом:

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \Lambda_{j-1}p_{j-1}(t) - (\Lambda_j + M_j)p_j(t) + M_{j+1}p_{j+1}(t), \quad j = \overline{0, m+1}, \quad (3.63)$$

с учетом

$$\Lambda_{-1} = \Lambda_{m+1} + M_0 = M_{m+1} = M_{m+2} = 0.$$

На основе решения системы уравнений (3.63) при начальных условиях

$$p_0(t) = 1; \quad p_j(t) = 0; \quad j = \overline{1, m+1},$$

определяются вероятность безотказной работы

$$R_{(m)}(t) = 1 - p_{m+1}(t)$$

и средняя наработка системы между отказами

$$m_t = \int_0^{\infty} R_{(m)}(t) dt.$$

Для определения коэффициента готовности  $K_r(t)$  рассматриваемой системы используется граф  $\mathcal{G}_0$  с отражающим состоянием  $x_{m+1}$  (см. рис. 3.48б). Здесь также решается система уравнений (3.63), но при  $M_{m+1} \neq 0$ , т. е. с учетом  $\Lambda_{-1} = \Lambda_{m+1} + M_0 = M_{m+2} = 0$ . В результате решения системы уравнений определяются вероятность  $p_j(t)$ ,  $j = \overline{0, m+1}$  и нестационарный коэффициент готовности

$$K_r(t) = 1 - p_{m+1}(t).$$

Например, объект состоит из двух элементов — рабочего и нагруженного резервного. Пусть законы распределения времени работы элементов между отказами и восстановления показательные с параметрами  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно. При отказе одного из элементов производится его восстановление. Отказ объекта происходит, когда при восстановлении отказавшего

элемента выходит из строя и другой элемент. Таким образом, имеют место кортежи  $\langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle$  и  $\langle \lambda, \lambda, 0, 0, \mu \rangle$ . Множество  $X$  включает три состояния:  $x_0$  — работоспособны оба элемента,  $x_1$  — один элемент отказал и восстанавливается,  $x_2$  — отказали оба элемента, т. е. это состояние отказа объекта. На рисунке 3.49а, б показаны графы переходов с поглощающим  $\mathcal{G}_\Pi$  и отражающим  $\mathcal{G}_0$  состоянием  $x_2$ . С помощью первого графа определяется вероятность безотказной работы объекта, с помощью второго — функция и коэффициент готовности.

Графу (рис. 3.49а) соответствует следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda & \mu & 0 \\ 2\lambda & -(\mu + \lambda) & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix};$$

$$\dot{p}_i \triangleq \frac{d}{dt} p_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad p_i(t) \triangleq p(x_i, t),$$

где  $p(x_i, t)$  — вероятность состояния  $x_i$  в момент времени  $t$ .

В результате решения уравнения при начальных условиях  $p_0(0)=1, p_1(0)=p_2(0)=0$  определяется вероятность безотказной работы

$$R(t) = p_0(t) + p_1(t) = 1 - p_2(t).$$

Стационарные вероятности состояний  $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t)$ ,  $j = 0, m + 1$  могут быть определены по графу  $\mathcal{G}_0$  методом  $\overset{t \rightarrow \infty}{\text{графов}}$ . В этом методе используется понятие остовного входящего дерева (остова)  $\bar{g}_{i_c}$  со стоком в вершине  $i_c$ . Остов  $\bar{g}_{i_c}$  содержит все вершины графа  $\mathcal{G}(X, D)$ , не имеет контуров, и для любой вершины  $j \neq i_c$  существует единственный путь из  $j$  в  $i_c$ .

В общем случае граф  $\mathcal{G}(X, D)$  для произвольной вершины  $i$  имеет  $\alpha_i$  различных остовов, которые обозначим  $\mathcal{G}_i, j$ ,

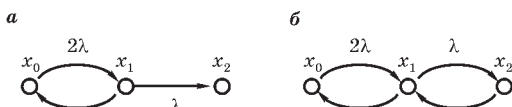


Рис. 3.49

Графы переходов системы  $\langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle$ :

а — с поглощающим состоянием  $x_2$ ; б — с отражающим состоянием  $x_2$ .

$j = \overline{1, \alpha_i}$ . Интенсивность (вес)  $v(\mathcal{G}_{i,j})$  остова  $\mathcal{G}_{i,j}$  равна произведению интенсивностей  $v(d)$  всех его дуг, а интенсивность  $\beta_i$  вершины  $i$  графа  $\mathcal{G}$  равна сумме интенсивностей всех различных остовов со стоком в вершине  $i$ . Таким образом,

$$v(\mathcal{G}_{i,j}) = \prod_{d \in D_{i,j}} v(d), \quad j = \overline{1, \alpha_i}; \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{\alpha_i} v(\mathcal{G}_{i,j}), \quad i = \overline{0, v},$$

где  $D_{i,j}$  — множество дуг  $j$ -го остова со стоком в  $i$ -й вершине.

Стационарные вероятности  $p_j$  методом графов определяют по формуле

$$p_i = \beta_i \left( \sum_{j=1}^v \beta_j \right)^{-1}, \quad i = \overline{0, v}.$$

Если для всех вершин  $\alpha_i = 1$ , т. е. граф  $\mathcal{G}$  — одноостовный, то

$$\beta_i = v(\mathcal{G}_{i,1}), \quad i = \overline{0, v}.$$

Одноостовный граф называют линейчатым, если вершина  $i \in [1, 2, \dots, v-1]$  смежная только с вершинами  $i+1$  и  $i-1$ , а вершины 0 и  $v$  смежные соответственно с вершинами  $x_1$  и  $x_{k-1}$ .

В нашем случае граф  $\mathcal{G}_0$  является линейчатым. Для него

$$\beta_{x_0} = \prod_{j=1}^{m+1} M_j; \quad \beta_{x_1} = \Lambda_0 \prod_{j=2}^{m+1} M_j, \dots;$$

$$\beta_{x_m} = \left( \prod_{j=0}^{m-1} \Lambda_j \right) M_{m+1}; \quad \beta_{x_{m+1}} = \prod_{j=0}^m \Lambda_j$$

и, следовательно,

$$p_i = \beta_{x_i} \cdot \left( \sum_{j=0}^{m+1} \beta_{x_j} \right)^{-1}, \quad i = \overline{0, m+1},$$

при этом стационарный коэффициент готовности  $K_{\Gamma} = 1 - p_{m+1}$ .

Многие ЭС рассматриваются как сложные системы, состоящие из множества различных объектов (частей). Отказы отдельных частей, как правило, не приводят к полному отказу всей системы, а лишь снижают эффективность ее функционирования. В качестве примеров сложных систем можно привести многоканальные системы связи, радиотехнические комплексы, системы управления технологическим оборудованием и т. д. [3].

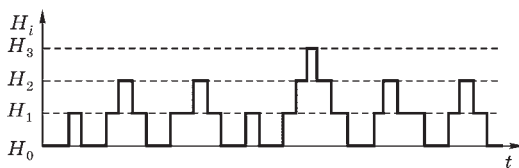
При расчете надежности сложных систем необходимо учитывать два обстоятельства. Во-первых, показатели надежности системы часто являются промежуточными, необходимыми для расчета ее эффективности и безопасности, а во-вторых, отражают специфику изменения состояния системы, вызываемого отказами входящих в нее элементов. На рисунке 3.50 показан пример траектории изменения состояний работоспособности сложной системы, здесь  $H_i$  — подмножество состояний с  $i$ -ми отказавшими элементами. Среднюю эффективность функционирования сложной системы можно оценить как

$$E = \sum_{i=0}^s e_i p_i,$$

где  $s + 1$  — число состояний системы;  $e_i$  — эффективность системы в состоянии  $H_i$ ;  $p_i$  — стационарная вероятность состояния  $H_i$ .

Если сложная система состоит из  $\nu$  одинаковых элементов, то в качестве показателя ее надежности можно рассматривать среднюю долю нормально функционирующих элементов, т. е.

$$\delta = \frac{1}{\nu} \sum_{i=0}^{\nu} (\nu - i) p_i.$$



**Рис. 3.50**  
Изменение состояний сложной системы во времени

Моделирование надежности сложной системы значительно упрощается, если при ее декомпозиции на составные части (элементы) выполняются условия: отказы элементов — события независимые, каждый элемент имеет два состояния — нормальной работы и отказа. Пусть время работы и время ремонта элементов подчиняются экспоненциальным распределениям. Тогда исходными данными для расчета будут параметры отказов элементов  $\lambda_j$ ,  $j=1, 2, \dots, v$ , интенсивности восстановления элементов  $\mu_j$ ,  $j=1, 2, \dots, v$ , и число ремонтных бригад  $r$ .

Для расчета вероятностей состояний сложной системы составляется граф переходов  $\mathcal{G}$ . Например, система состоит из двух объектов с интенсивностями отказов и восстановления соответственно  $\lambda_1, \mu_1$  и  $\lambda_2, \mu_2$ , обслуживание неограниченное ( $r=2$ ). Для данной системы возможны следующие состояния:  $H_0=x_0$  — оба объекта исправны,  $x_1$  — неработоспособен первый объект,  $x_2$  — неработоспособен второй объект,  $x_3=H_2$  — неработоспособны оба объекта. Из состояния  $x_0$  система может перейти в состояние  $x_1$  с интенсивностью отказов  $\lambda_1$  и в состояние  $x_2$  с интенсивностью  $\lambda_2$ . Из состояния  $x_1$  с интенсивностью  $\lambda_2$  система может перейти в состояние  $x_3$  и с интенсивностью восстановления  $\mu_1$  вернуться в состояние  $x_0$  и т. д. По графу переходов сложной системы (рис. 3.51) составляют квадратную матрицу переходных вероятностей  $\mathbf{P}=\|\pi_{ij}\|$ .

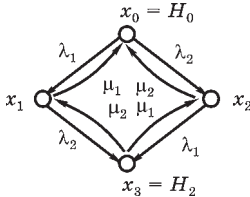


Рис. 3.51

Граф переходов сложной двухобъектной системы с неограниченным обслуживанием

Элемент  $\pi_{ij}$  матрицы представляет собой вероятность перехода системы из состояния  $x_i$  в состояние  $x_j$  за малый промежуток времени  $dt$ . Для графа переходов, представленного на рисунке 3.51, матрица  $\mathbf{P}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)dt & \lambda_1 dt & \lambda_2 dt & 0 \\ \mu_1 dt & 1 - (\lambda_2 + \mu_1)dt & 0 & \lambda_2 dt \\ \mu_2 dt & 0 & 1 - (\lambda_1 + \mu_2)dt & \lambda_1 dt \\ 0 & \mu_2 dt & \lambda_2 dt & 1 - (\mu_1 + \mu_2)dt \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Сумма элементов каждой строки матрицы  $\mathbf{P}$  равна 1, т. е. матрица является стохастической. По столбцам матрицы  $\mathbf{P}$  записывают систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = -(\lambda_1 + \lambda_2)p_0(t) + \mu_1 p_1(t) + \mu_2 p_2(t); \\ \dot{p}_1 = \lambda_1 p_0(t) - (\lambda_2 + \mu_1)p_1(t) + \mu_2 p_3(t); \\ \dot{p}_2 = \lambda_2 p_0(t) - (\lambda_1 + \mu_2)p_2(t) + \mu_1 p_3(t); \\ \dot{p}_3 = \lambda_2 p_1(t) + \lambda_1 p_2(t) - (\mu_1 + \mu_2)p_3(t). \end{cases} \quad (3.64)$$

Заметим, что элементы  $\pi_{ij}$  матрицы (без  $dt$  и 1) служат коэффициентами перед вероятностями  $p_i(t)$  в правых частях уравнений.

Решением системы дифференциальных уравнений (3.64) являются нестационарные вероятности состояний  $p_i(t)$ ,  $i = 0, 3$ .

Вектор стационарных вероятностей  $p = (p_i, i = \overline{0, 3})$  определяют, решая систему алгебраических линейных уравнений, получаемых из условий  $p_i = 0$ ,  $i = \overline{0, 3}$  и  $\sum p_i = 1$ . В нашем случае эта система уравнений (последнее уравнение заменено уравнением нормировки) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -(\lambda_1 + \lambda_2)p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 &= 0; \\ \lambda_1 p_0 - (\lambda_2 + \mu_1)p_1 + \mu_2 p_3 &= 0; \\ \lambda_2 p_0 - (\lambda_1 + \mu_2)p_2 + \mu_1 p_3 &= 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 &= 1. \end{aligned}$$

При значительном числе элементов системы определение вероятностей  $p_i(t)$  и  $p_i$  связано с громоздкими вычислениями. Для отдельных частных случаев можно использовать конечные формулы. Например, в случае  $r=1$  разных значений интенсивностей отказов  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и одинаковых интенсивностях восстановления  $\mu_1 = \dots = \mu_n = \mu$  формулы для определения стационарных вероятностей имеют вид:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{m=0}^n m! \sum_{\substack{i < j < n \\ m}} \rho_i \rho_j \dots \rho_n}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}; \quad i = \overline{1, 2, \dots, n};$$

$$p_l = \frac{l}{p_0} \sum_{\underbrace{i < j < \dots < k}_l} \underbrace{\rho_i \rho_j \dots \rho_k}_l, \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

где  $p_l$  — сумма вероятностей состояний, характеризующихся числом  $l$  отказавших элементов.

С ростом числа объектов трудности моделирования надежности сложных систем быстро возрастают из-за большого количества возможных состояний  $N$ . Так, например, для системы из  $n$  объектов число состояний, отличающихся номерами отказавших элементов, равно

$$N = \left( \sum_{i=0}^n n! [i!(n-i)!]^{-1} \right) \left( \sum_{i=0}^n n! [i!(n-i)!]^{-1} \right)$$

и при  $n=20$  составляет более миллиона. Если учитывать очередность отказавших элементов, то

$$N = n! \sum_{i=0}^n [(n-i)!]^{-1},$$

т. е. при  $n=20$  число состояний  $N$  превышает  $10^{18}$ .

Оперировать такими массивами чисел чрезвычайно трудоемко даже при использовании современных средств вычислительной техники. В этих случаях вычисляют нижние и верхние граничные значения показателей надежности. Для систем, у которых  $\lambda_i$  разные,  $\mu$  — одинаковые,  $1 < r < n$ , нижние граничные значения вероятностей рассчитываются по формулам:

$$p_0^{\bar{\lambda}} = \left( \sum_{i=0}^n b_i \right)^{-1}; \quad (3.65)$$

$$P_i^{\bar{\lambda}} = \begin{cases} \frac{n-i+1}{i} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\mu} \cdot P_{i-1}^{\bar{\lambda}}, & i \leq r; \\ \frac{n-i+1}{i} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\mu} \cdot P_{i-1}^{\bar{\lambda}}, & i > r; \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\delta^{\bar{\lambda}} = \left( n \sum_{i=0}^n b_i \right)^{-1} \sum_{i=0}^n (n-i) b_i; \quad (3.67)$$



$$b_0 = 1, b_i = \begin{cases} \frac{n-i+1}{i} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\mu} \cdot b_{i-1}, & i \leq r; \\ \frac{n-i+1}{i} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\mu} \cdot b_{i-1}, & i > r; \end{cases} \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (3.68)$$

а верхние границы оцениваются по этим же формулам при использовании вместо  $\bar{\lambda}$  значения  $\lambda_n = \min\{\lambda_j, j = \overline{1, n}\}$ .

Применительно к системам с разными интенсивностями восстановления элементов для нижних границ в формулах (3.65)–(3.68) используются  $\bar{\lambda}$  и  $\mu_n = \min\{\mu_j, j = \overline{1, n}\}$ ,

а для верхних —  $\lambda_n$  и  $\mu_n = \max\{\mu_j, j = \overline{1, n}\}$ .

### 3.4.3. Модели динамических дискретных систем

Одним из инструментов исследования сложных динамических дискретных систем, примерами которых могут служить телекоммуникационные сети, комплексы средств цифровой радиосвязи, вычислительной техники и др., является особый математический аппарат, получивший название сети Петри, разработанный К. А. Петри в 1962 г. для моделирования систем с параллельными взаимодействующими компонентами.

С математической точки зрения, сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф  $G=(S, T, F)$ , состоящий из вершин двух типов — множества позиций  $S=\{s_i\}$ ,  $i = \overline{1, l}$  (изображаемых окружностями), и множества переходов  $T=\{t_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$  (отображаемых в виде черточек или полочек), соединенных между собой множеством ориентированных связей — дуг  $F=\{f_k\}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , причем вершины одного типа не могут быть соединены непосредственно.

Функция, которая каждой позиции ставит в соответствие целое неотрицательное число и характеризуемая вектором  $\Phi=\{\Phi(s_i)\}$ ,  $i = \overline{1, l}$ , где  $l$  — число позиций сети Петри, называется маркировкой сети Петри [25]. В графическом изображении маркировке  $\Phi$  соответствует размещение меток (в виде точек, маркеров и других символов) в позициях сети. При этом число меток в позиции  $s_i$  равно  $\Phi(s_i)$ .

Различные маркировки сети Петри характеризуют состояния соответствующей ей динамической системы, причем динамика изменений состояния моделируется движением меток по позициям. Маркировка сети может изменяться при срабатывании ее переходов. Каждое изменение маркировки называют событием, при этом каждое событие связано с определенным переходом. Считается, что события происходят мгновенно и одновременно при выполнении некоторых условий.

Каждому условию в сети Петри соответствует конкретная позиция  $s_i$ . Совершению события соответствует срабатывание (возбуждение или запуск) перехода, при котором маркеры из входных позиций этого перехода перемещаются в выходные позиции. Последовательность событий и образует моделируемый процесс.

Конкретизируя правила срабатывания переходов, можно заключить, что переход срабатывает в том случае, если для каждой из его входных позиций  $s_i$  число маркеров в  $i$ -й входной позиции не меньше числа дуг  $n$ , идущих от нее к переходу  $t_j$ . После срабатывания перехода количество маркеров в  $i$ -й входной позиции уменьшается на  $n$ , а в  $l$ -й выходной позиции — увеличивается на число дуг  $m$ , связывающих переход с выходной позицией.

При применении сетей Петри для решения задач управления позициям сопоставляются операции (действия), а переходам — условия, при выполнении которых возбужденные переходы срабатывают, активизируя соответствующие операции [25]. При этом попадание меток в позицию ассоциируется с началом операции, а удаление метки — с ее завершением. Для описания таких процессов могут применяться только безопасные сети Петри, т. е. такие сети, в которых при любой маркировке в каждой позиции не может быть более одной метки.

Чтобы при любом протекании дискретного процесса была возможность его возобновления, при котором любая из множества заданных операций была бы выполнима, сеть Петри не должна порождать такие маркировки, для которых другие маркировки недостижимы. Такую сеть

Петри называют живой. Безопасные и живые сети Петри называются правильными.

В качестве примера на рисунке 3.52 показано распределение маркеров по позициям перед срабатыванием, характеризуемое вектором  $\Phi=(2, 3, 2, 2, 1)$ . Как видно из рисунка 3.52, после срабатывания перехода маркировка становится иной, т. е. вектор  $\Phi$  принимает значения  $\Phi=(1, 1, 0, 3, 4)$ .

Обычно считается, что если при одной и той же маркировке возбуждено несколько переходов, то может сработать любой, но только один из них. Так, на рисунке 3.53 показана конфликтная ситуация, при которой маркер в позиции  $s$  может запустить либо переход  $t_1$ , либо переход  $t_2$ .

Часто вводят ряд дополнительных правил и условий в алгоритмы моделирования, получая ту или иную разновидность сетей Петри. Так, иногда вводят время, чтобы моделировать не только последовательность событий, но и их привязку ко времени. Это осуществляется приданием переходам веса, под которым подразумевается продолжительность (задержка) срабатывания, которую можно определять, используя задаваемый при этом алгоритм. Полученную модель называют временной сетью Петри. Если задержки являются случайными величинами, то сеть называют стохастической сетью Петри. В стохастических сетях возможно введение вероятностей срабатывания возбужденных переходов. Поэтому при возникновении конфликтных ситуаций (рис. 3.53) стохастическая сеть предусматривает в этом случае вероятностный

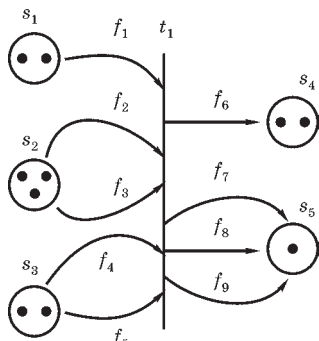


Рис. 3.52  
Маркировка сети Петри перед срабатыванием перехода

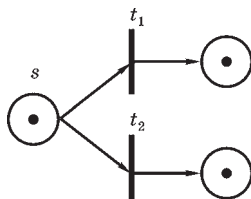


Рис. 3.53  
Пример конфликтной ситуации

выбор срабатывающего перехода. Если задержки определяются как функции некоторых аргументов, которыми могут быть количества маркеров в каких-либо позициях, состояния некоторых переходов и т. п., то говорят о функциональной сети Петри.

В качестве примера рассмотрим описание с помощью сети Петри процессов возникновения и устранения отказов в некоторой радиоэлектронной системе, состоящей из множества однотипных блоков [1]. В ремонтном комплекте имеется один запасной блок, а также известны статистические данные об интенсивностях возникновения отказов и длительностях операций по восстановлению системы (время на поиск неисправностей и время на замену и ремонт отказавшего блока). Пусть поиск и замену отказавшего блока производит одна бригада, а ремонтом неисправного блока занимается другая бригада. Модель процесса в виде сети Петри приведена на рисунке 3.54.

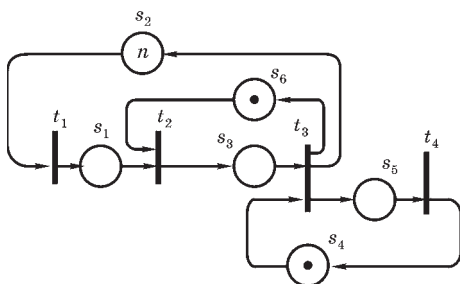


Рис. 3.54  
Функциональная сеть Петри

отображают следующие события:  $t_1$  — отказ блока,  $t_2$  — поиск неисправного блока,  $t_3$  — его замена,  $t_4$  — ремонт.

При непустой позиции  $s_2$  переход  $t_1$  срабатывает с задержкой, равной вычисленному случайному значению моделируемого отрезка времени между отказами. После выхода маркера из  $t_1$  он попадает через  $s_1$  в  $t_2$ . Наличие метки в позиции  $s_6$  означает, что обслуживающий систему персонал свободен и может приступить к поиску возникшей неисправности. В переходе  $t_2$  метка задерживается на время, равное случайному значению времени на поиск неисправности. Далее маркер оказывается в  $s_3$  и, если имеется запасной блок (маркер в  $s_4$ ), запускается переход

модели процесса в виде сети Петри приведена на рисунке 3.54.

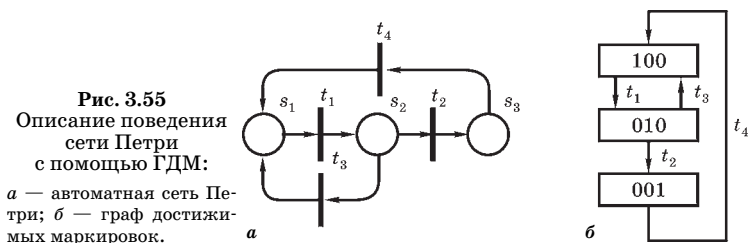
Для случая нашего примера значение  $n$  в позиции  $s_2$  (рис. 3.54) соответствует числу имеющихся в системе блоков. Переходы

$t_3$ , из которого маркеры выйдут в  $s_2$ ,  $s_5$  и  $s_6$  через отрезок времени, требуемый для замены блока. После этого в  $t_4$  имитируется ремонт неисправного блока.

Следовательно, рассматриваемая модель описывает функционирование системы в условиях, когда отказы могут возникать и в рабочем, и в неисправном состояниях системы. Поэтому не исключены ситуации, при которых более чем один маркер окажется в позиции  $s_1$ .

Таким образом, главным достоинством сетей Петри является возможность отображения в виде одной компоненты взаимодействия нескольких параллельно-последовательных процессов, а их недостаток заключается в том, что сети Петри не описывают в явном виде поведение, т. е. динамику смены состояний. Сложность анализа поведения сетей Петри состоит в том, что приходится одновременно следить за положением нескольких меток и запоминать эти ситуации. Поведение сети Петри в явном виде описывается с помощью графа достижимых маркировок (ГДМ). Несмотря на то что число вершин в ГДМ не меньше, чем в соответствующей сети Петри, ГДМ для восприятия значительно проще, поскольку в нем для каждой вершины указаны значения всех компонент вектора, определяющие состояние системы. Кроме того, ГДМ удобен для анализа поведения системы тем, что в явном виде описывает динамику изменения ее состояний.

Заметим, что правильная сеть Петри называется автоматной, если все ее переходы имеют не более одной входящей и не более одной выходящей дуги, а в ее начальной маркировке имеется не более одной метки. В качестве примера на рисунке 3.55*а* приведена автоматная сеть Петри, а на рисунке 3.55*б* — соответствующий ей ГДМ [25].



Дальнейшим развитием сетей Петри являются цветные и ингибиторные сети [1], [25]. Так, во многих задачах динамические объекты могут быть нескольких типов, и для каждого типа нужно вводить свои алгоритмы поведения в сети. В этом случае каждая метка должна иметь хотя бы один параметр, обозначающий ее тип. Такой параметр обычно называют цветом, а саму сеть — цветной сетью Петри. Ингибиторные сети Петри характеризуются тем, что в них возможны запрещающие или ингибиторные дуги. Наличие маркера во входной позиции, связанной с переходом ингибиторной дугой, означает запрещение срабатывания перехода.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова роль и в чем заключается назначение математических моделей при автоматизированном проектировании ЭС?
2. Что представляет собой процесс моделирования?
3. Каким требованиям должна удовлетворять математическая модель?
4. Какие основные этапы работ выполняются при построении математической модели объекта?
5. В чем заключается принцип организации процесса компьютерного моделирования?
6. По каким признакам осуществляют классификацию математических моделей?
7. Какие модели называют функциональными?
8. Какие объекты входят в динамическую модель системы?
9. Что характеризует вектор фазовых координат системы?
10. Какие процессы, протекающие в ЭС, описываются математическими моделями на микроуровне?
11. Какие математические соотношения используются при моделировании на микроуровне?
12. В чем заключаются различия между математическими моделями на микро- и макроуровнях?
13. Решение каких задач связано с использованием математических моделей макроуровня?

14. Какие дополнительные требования предъявляются к математическим моделям на макроуровне?
15. Какие виды уравнений используются в математических моделях на макроуровне?
16. Для решения каких задач проектирования ЭС удобно использовать графовые модели?
17. Какие формы записи используются при представлении графа математическим выражением?
18. Как представить в виде графовой модели монтажно-коммутационное пространство?
19. В чем состоят особенности представления электрических схем графовыми моделями?
20. В чем заключается принципиальная разница между аналоговыми и цифровыми электрическими сигналами?
21. Как математически представляются периодические сигналы?
22. В чем заключается отличие между временным и частотным представлениями электрических сигналов?
23. Что представляет собой частотный спектр сигнала?
24. Каковы основные особенности моделирования сигналов в частотной области?
25. Как ширина полосы пропускания канала связи влияет на прохождение электрического сигнала?
26. В чем заключается принцип смешивания сигналов?
27. Как выполняется математическое представление процесса усиления одночастотного сигнала линейным усилителем?
28. Каковы особенности процесса объединения разночастотных сигналов в линейном усилителе?
29. В чем состоит специфика моделирования процессов нелинейного смешивания сигналов?
30. Как математически представить модель процесса нелинейного усиления одночастотного сигнала?
31. Каковы особенности моделирования процессов нелинейного усиления многочастотных сигналов?
32. Какие основные специфические особенности имеет аналоговая аппаратура с точки зрения выполнения математического моделирования протекающих в ней процессов?

33. Для чего в ЭС применяют колебательные системы и как осуществляют их моделирование?
34. На каких принципах основана работа генераторов и в каких целях используют генераторы в ЭС?
35. Выполнение каких условий необходимо для устойчивой работы генератора с обратной связью?
36. Как выглядит структурная модель генератора с обратной связью?
37. Какие основные соотношения используются при математическом представлении структурной модели генератора?
38. Для каких целей применяются и какими основными параметрами характеризуются фильтры сигналов?
39. Каковы особенности выделения из общего частотного спектра сигналов определенных частот?
40. Как выполняют математическое моделирование фильтров, каковы особенности представления передаточной характеристики аналоговых фильтров?
41. Как осуществляют моделирование фильтров Баттерворта?
42. Как проводят моделирование фильтров Чебышева?
43. Проведите сравнение АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева, в чем их основное отличие?
44. Как осуществляют практическую реализацию пассивных фильтров высоких и низких частот?
45. Какое назначение и в каких целях применяются операционные усилители?
46. Какие основные модели типовых устройств на операционных усилителях вы знаете? Приведите их математическую запись.
47. Что представляют собой потенциальные и импульсные сигналы?
48. В чем заключаются отличия между динамической и статической моделями логического элемента?
49. Какое состояние логической схемы является устойчивым, а какое — неустойчивым?
50. Какие виды цифровых автоматов вам известны?
51. В чем отличие моделей асинхронных и синхронных потенциальных автоматов?



52. Почему цифровые автоматы иногда называют конечными автоматами?
53. Что представляют собой состояние входа, состояние выхода и внутреннее состояние цифрового автомата?
54. Какие цифровые автоматы называют полными, а какие — неполными?
55. Какие практические задачи проектирования ЭС решаются с использованием теории автоматов?
56. В чем заключается специфика математического моделирования электродинамических объектов по сравнению с другими ЭС?
57. Какие уравнения составляют основу для построения математических моделей объектов электродинамики?
58. По каким принципам выполняется декомпозиция СВЧ-устройств?
59. Как осуществляется построение математических моделей базовых блоков?
60. Как от отдельных матриц рассеяния для базовых блоков перейти к математической модели всего устройства?
61. В чем заключаются особенности моделирования антенных устройств?
62. Какие особенности характерны для моделирования на системном уровне?
63. Какие задачи проектирования решаются с использованием математических моделей на системном уровне?
64. Какие виды математических моделей используются при моделировании на системном уровне?
65. В каких целях при моделировании на системном уровне применяются дискретные имитационные модели?
66. В чем состоит сущность четырех подходов к построению дискретных имитационных моделей?
67. По каким признакам различаются системы массового обслуживания?
68. Что представляют собой потоки заявок?
69. Какие основные свойства рассматривают при моделировании потоков событий?
70. Какие модели используются для описания потоков событий?

71. Какими свойствами обладает простейший поток событий?
72. Какие показатели характеризуют функционирование системы массового обслуживания?
73. В каких целях разрабатываются математические модели надежности?
74. Как формируют представление о разрабатываемой модели надежности?
75. По каким признакам характеризуется объект при анализе надежности?
76. Как классифицируют объекты ЭС по ремонту и восстановлению?
77. Какие показатели используются для количественной оценки надежности проектируемого ЭС?
78. Как выполняют оценку основных показателей надежности?
79. Какие распределения случайных величин широко используются при определении вероятностей выхода параметров за пределы допуска?
80. Как формулируются прямая и обратная задачи, связанные с допусками, при анализе системы?
81. Какими показателями характеризуется надежность ремонтируемых восстанавливаемых объектов ЭС?
82. Какие модели используются для определения показателей надежности восстанавливаемых систем?
83. В чем заключаются особенности различных видов резервирования?
84. Каковы особенности моделирования сложных систем при анализе их надежности?
85. Что представляет собой с математической точки зрения сеть Петри?
86. Что характеризует маркировка сети Петри?
87. По каким правилам в сети Петри осуществляется срабатывание переходов?
88. В чем отличие стохастических сетей Петри от обычных?
89. Как представить сеть Петри графом достижимых маркировок?
90. В чем отличие цветных и ингибиторных сетей от обычных сетей Петри?

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

**М**одели объектов проектирования, рассмотренные в третьей главе, и методы решения широкого круга конструкторско-технологических задач с использованием средств автоматизации составляют ядро математического обеспечения САПР электронных средств. Как и математические модели, так и методы решения проектных задач отличаются значительным многообразием. Поэтому часто решение какой-либо конкретной задачи может иметь несколько вариантов. Следует заметить, что разнообразие методов позволяет выделить среди них как относительно простые, не требующие для их освоения специальной математической подготовки, так и достаточно сложные, основу которых составляет своеобразный и специфический математический аппарат.

Следовательно, качество разработок сложных технических систем, яркими примерами которых являются ЭС различного назначения, во многом определяется тем, насколько инженерный персонал владеет современными способами решения задач проектирования, а также имеет представление о том, какие методы реализованы в том или ином программном пакете САПР. Только в этом случае можно обеспечить обоснованное предпочтение конкретного метода решения проектной задачи и осуществить грамотный выбор подходящего программного средства.

#### **4.1. ОБЗОР ЗАДАЧ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭС И МЕТОДОВ ИХ РЕШЕНИЯ**

Как в нашей стране, так и за рубежом, важными векторами развития современных ЭС считаются рост их функциональных возможностей, усложнение структуры, применение новых методов обработки сигналов, использование микропроцессорных модулей управления работой системы, увеличение числа ее информационных входов, необходимость адаптации к резко изменяющимся условиям окружающей среды, возможность сохранения состояния работоспособности в условиях воздействия дестабилизирующих факторов и многое другое. В качестве примеров такого непрерывного развития ЭС можно указать развитие средств сотовой и спутниковой связи, вычислительной техники и телевидения. Так, практически в течение десятилетия у указанных ЭС настолько быстро изменялись функциональные, технические и эксплуатационные характеристики, что моральное устаревание этих ЭС наступало значительно раньше их физического износа. Считается, что эта тенденция в ближайшие годы будет только усиливаться. Именно поэтому всем проектам, направленным на разработку ЭС, свойственны уникальность и неповторимость, связанная с поиском новых решений для возникающих по мере выполнения проектных работ разнообразных задач.

В соответствии с целями автоматизированного проектирования ЭС, рассмотренными в § 1.2, по степени новизны создаваемого ЭС выделяют задачи частичной модернизации (в основном это изменение параметров прототипа), существенной модернизации (изменение структуры и параметров) и создание новой системы (с использованием новых принципов действия). В зависимости от сложности достижения поставленной цели различают простые, средней сложности, сложные и очень сложные задачи (проекты, программы). Простые задачи решаются небольшой группой разработчиков, а к решению очень сложных задач, например созданию новых комплексов связи, привлекаются кол-

лективы нескольких научно-исследовательских организаций, проектных институтов и производственных предприятий [2], [3].

Применительно к этапам проектирования ЭС можно выделить четыре группы близких по однородности задач, это задачи системотехнического, схемотехнического, конструкторского и технологического проектирования, а также задачи, связанные с испытаниями ЭС.

В ходе решения системотехнических задач определяются цели проектирования с кратким технико-экономическим обоснованием, формулируются задачи проектирования сначала на качественном уровне, затем с количественными данными и в завершении разрабатывается план выполняемых работ. Часто план включает в себя выполнение научно-исследовательских работ с решением задач структурной оптимизации. К основным особенностям задач этой группы следует отнести высокую степень ответственности за получение правильных результатов, большую неопределенность используемых данных, недостаточность хорошо разработанных методик и математических методов их решения. В связи с этим при решении системотехнических задач достаточно широкое применение находят методы управления рисками, поддержки принятия решений, управления проектами и др. Важно помнить, что ошибки, допущенные на начальных этапах проектирования и обнаруженные на последующих, обходятся намного дороже, чем их своевременная ликвидация.

Для решения задач схемотехнического проектирования разработано достаточно большое число методов, которые используются в математическом обеспечении современных САПР. Результаты решения схемотехнических задач служат исходными данными для конструкторско-технологического проектирования и разработки испытательной аппаратуры.

Решение задач как конструкторского, так и технологического проектирования во многом регламентировано существующей нормативно-технической документацией, основу которой составляют стандарты Единой системы

конструкторской документации (ЕСКД) и Единой системы технологической документации (ЕСТД). Кроме того, при решении конструкторско-технологических задач широко используются методы оптимизации, позволяющие вырабатывать наилучшие проектные решения, в том числе и по экономическим показателям.

Весьма существенная роль при конструкторском проектировании с использованием средств автоматизации отводится методам компоновки (объединения модулей низшего уровня конструктивной иерархии компонентов конструкции в модули более высокого уровня), размещения (оптимального расположения элементов в монтажно-коммутационном пространстве) и трассировки (определения геометрических параметров проводников, соединяющих эквипотенциальные контакты ЭРИ согласно электрической принципиальной схеме проектируемого устройства). Учитывая важность и сложность этих методов, они будут достаточно подробно рассмотрены в пятой главе настоящего учебного пособия.

Все рассмотренные группы задач тесно взаимосвязаны и во многих случаях при решении задач одной группы приходится возвращаться к решению задач, им предшествующих. Например, при выполнении конструкторского проектирования может возникнуть необходимость пересмотра схемотехнических решений и даже принципа действия ЭС (системотехническое проектирование), т. е. в схеме процесса проектирования имеют место обратные связи и отдельные итерации могут выполняться многократно.

## **4.2. ЗАДАЧИ СИСТЕМОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

Главными специфическими особенностями задач уровня системотехнического проектирования, во многом определяющими подходы к выбору методов их решения, являются следующие:

- высокая стоимость ошибки от неправильно принятого решения, в большинстве случаев связанная с большими материальными и временными затратами;

- многие задачи носят уникальный характер и для их решения отсутствуют готовые математические модели;
- задачи являются сложными в математическом отношении, так как при расчете частных показателей требуют учета множества накладываемых ограничений;
- для решения многих задач характерны условия неопределенности, связанные с отсутствием достоверных данных;
- большинство задач требуют оперативного решения из-за жесткого ограничения отводимого на них времени;
- решение многих задач связано с использованием обширной справочной информации;
- принятие верного решения зачастую основано только на квалификации, опыте и интуиции специалиста-эксперта.

К перечисленным особенностям следует добавить и ряд обстоятельств, вызывающих дополнительные трудности в получении обоснованных решений:

- отсутствие или неполнота достоверных данных, необходимых для построения математических моделей при решении задач оптимизации;
- высокая стоимость и длительные сроки проведения экспериментальных исследований для получения достоверных данных;
- субъективизм в выборе критериев, весовых коэффициентов, оценки стоимостных затрат и т. д.;
- высокая размерность многих решаемых задач.

Кроме того, следует иметь в виду, что обычно проектирование ЭС, как и любой другой сложной технической системы, выполняется при участии групп специалистов разного профиля. В этом случае возникают проблемы синтеза по функциональным характеристикам подсистем с требуемыми выходными показателями, конструирования всей системы из готовых блоков, и др.

При решении задач системотехнического проектирования в условиях быстро меняющейся и нестабильной

среды современного рынка необходимо учитывать внезапность и непредсказуемость изменений текущих условий, возникновение неожиданных событий и новых факторов политической, экономической и социальной природы, влияющих на скорость ответной реакции предприятия. В таких ситуациях для принятия проектных решений возрастает роль качественных методов, в том числе основанных на экспертных оценках, а также методов принятия решений в условиях частичной или полной неопределенности.

Успех решения задач системотехнического проектирования в значительной степени обеспечивается тем, насколько четко и правильно они сформулированы, какие методы использовались для их решения и насколько грамотно интерпретируются полученные результаты.

Так, по степени важности принимаемых решений для деятельности предприятия и тяжести последствий от возможных ошибок выделяют три специализированные группы решений [26]:

1) стратегические решения, относящиеся к долгосрочным проектам и принимаемые руководством верхнего уровня;

2) тактические решения по среднесрочным проектам, они обычно принимаются руководителями среднего уровня;

3) оперативные решения по краткосрочным проектным задачам, относящиеся к различным этапам выполнения проекта и принимающиеся руководителями различного уровня.

Рассмотрим постановки простейших задач принятия проектных решений [3].

Пусть задано множество альтернативных вариантов решения

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad (4.1)$$

и сформулирован критерий  $Q$ , на основе которого необходимо принять решение о наилучшем варианте  $v^* \in \mathcal{V}$ . Данную задачу назовем задачей выбора оптимального варианта (ВОВ).



Если из множества (4.1) по критерию  $Q$  требуется выделить подмножество таких вариантов  $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ , что каждый вариант  $v_j^0 \in \mathcal{V}$  предпочтительнее вариантов  $v_v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0$ , то такую задачу будем называть задачей выбора предпочтительных вариантов (ВПВ).

Сформулированные задачи ВОВ и ВПВ можно записать в виде:

$$v^* = \underset{v}{\operatorname{arg\,opt}} \{Q(v), v \in \mathcal{V}\}; \quad (4.2)$$

$$\forall v_j^0 \in \mathcal{V}_0; \forall v_v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0: v_j^0 \succ_Q v_v, \quad (4.3)$$

где  $\succ_Q$  — знак предпочтения по критерию  $Q$ .

По степени определенности и полноты исходных данных для задач ВОВ, ВПВ и других, решаемых при системотехническом проектировании, можно условно выделить три класса задач.

К первому классу относятся задачи, для которых рассматривается лишь множество альтернативных вариантов и критерий в виде словесной формулировки целевой функции, т. е. это задачи принятия решений в условиях полной неопределенности, или задачи качественного характера.

Второй класс задач характеризуется заданием количественных данных (часто приближенных) о значениях критерия в различных ситуациях, а в ряде случаев и сведений о вероятности этих ситуаций, — это задачи принятия решений в условиях частичной неопределенности.

Для задач третьего класса задаются математические модели, позволяющие рассчитывать значения критерия и другие характеристики, необходимые для принятия решения, это класс задач математического программирования.

Задачи первого класса обычно возникают, когда решение необходимо принять оперативно и в достаточно новой сфере проектной деятельности, когда для сбора экспериментальных данных и разработки математической модели нет времени или средств. Источниками информации здесь в основном являются интуиция и опыт привлекаемых

консультантов и экспертов. Поэтому для решения задач этого класса широкое распространение получили методы экспертных оценок и другие родственные им методы.

Для задач второго класса, т. е. в условиях частичной неопределенности, известно большое число методов, как классических с хорошо разработанной теорией, так и эвристических.

При реализации вариантов  $v \in \mathcal{V}$  могут возникнуть различные ситуации  $s$ , составляющие множество

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}.$$

Например, для технических проектов, подаваемых на конкурс, в качестве таких ситуаций могут рассматриваться следующие: несоответствие реальных технических характеристик изделий ожидаемым по проекту; уменьшение потребительского спроса; увеличение себестоимости по сравнению с запланированной и т. д. Изменение ситуаций может носить как нейтральный, так и противодействующий (конфликтный) характер.

На момент решения задач (4.2) или (4.3) неизвестно, какая из ситуаций  $s \in S$  будет иметь место в действительности. Значения критерия  $Q$  для различных ситуаций также будут различаться, т. е. для двух вариантов  $v_i$  и  $v_j$  надо сопоставлять множества  $\{Q(v_i; s), s \in S\}$  и  $\{Q(v_j; s), s \in S\}$ .

Если множество ситуаций  $S$  применительно к задачам (4.2), (4.3) четко определено для всех вариантов, то задачи будем соответственно называть задачами ВОВ и ВПВ в условиях неопределенности, обусловленной возможными ситуациями  $S$ , или сокращенно ВОВ на  $S$  и ВПВ на  $S$ .

Математически данные задачи формулируются следующим образом:

$$v^* = \arg \underset{v}{opt} \{Q(v, S), v \in \mathcal{V}\}; \quad (4.4)$$

$$\forall v_j^0 \in \mathcal{V}_0, \forall v_v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0: v_j^0 \underset{Q(\mathcal{V}, S)}{\succ} v_v, \quad (4.5)$$

где  $Q(\mathcal{V}, S)$  — значение критерия  $Q$  для варианта  $v$  с учетом возможных ситуаций  $s \in S$ .

Если в задачах (4.4), (4.5) известны вероятности ситуаций  $P(S) = \{p_v(s), s \in S, v \in \mathcal{V}\}$ , то они соответственно называются задачами ВОВ и ВПВ на множестве вероятных ситуаций, или сокращенно ВОВ на  $P(S)$  и ВПВ на  $P(S)$ .

Большое значение при выборе метода решения задач ВОВ и ВПВ играет характер критерия  $Q$ . Можно выделить четыре основных случая задания критерия:

1) критерий представляет собой некую скалярную величину  $q$ , например выражающую один из показателей эффективности;

2) критерий является вектором с  $k$  компонентами, т. е.  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ ;

3) вместо количественного показателя в качестве критерия рассматривается словесно сформулированная цель —  $C$ , на основе которой принимается решение;

4) в качестве критерия задаются статистические данные, характеризующие эффективность вариантов, обозначим эти данные для варианта  $v_i$  массивом  $X(v_i) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN})$ ,  $v_i \in \mathcal{V}$ .

Принятие решения относительно любой приведенной задачи является заключительным этапом следующего процесса:

- 1) возникновение и конкретизация проблемы;
- 2) идентификация модели задачи;
- 3) формирование множества альтернативных вариантов, выбор критерия, введение возможных ситуаций;
- 4) математическая постановка задачи;
- 5) наполнение задачи конкретными числовыми данными;
- 6) выбор метода решения;
- 7) численное решение задачи и анализ полученных результатов;
- 8) принятие решения по проблеме.

Применение средств вычислительной техники наиболее эффективно сказывается на скорости получаемых результатов на этапах 2, 5, 6 и 7.

В принятии оптимальных решений по выбору наилучшего варианта обычно принимают участие три группы лиц, различающихся по их роли в процессе решения проблемы.

1. Лицо, принимающее решение (ЛПР), или целая группа таких лиц. ЛПР формулирует цель (т. е. критерий оптимальности), ограничения, окончательно устанавливает вариант для реализации (т. е. принимает итоговое решение).

2. Группа экспертов — специалистов по конкретной проблеме или экспертная комиссия (ЭК). ЭК определяет альтернативные варианты, критерии, выявляет относительную важность, значимость альтернатив, ранжирует или сравнивает варианты и т. д.

3. Группа консультантов по математическим методам теории принятия решений или рабочая группа (РГ). РГ координирует работу ЭК и ЛПР, разрабатывает процедуру работы, обрабатывает и анализирует информацию, полученную от экспертов.

В качестве модели задачи принятия решения применительно к выбору вариантов будем использовать кортеж

$$K = \langle W, F, N, U \rangle \quad (4.6)$$

со следующими компонентами:  $W$  — вид задачи по числу выделяемых вариантов (ВОВ —  $W = v^*$  или ВПВ —  $W = \mathcal{V}_0$ );  $F$  — функционал, определяющий характер задания критерия ( $F = q$ ,  $F = Q$ ,  $F = C$  или  $F = X$ );  $N$  — вид неопределенности, связанной с возможными ситуациями ( $N = S$ , если задается множество ситуаций,  $N = P(S)$ , если для ситуаций заданы вероятности, или  $N = 1$ , если ситуации не определены);  $U$  — участники принятия решения ( $U = \text{ЛПР}$ ,  $U = \text{ЭК}$ , или  $U = \text{ЛПР} + \text{ЭК}$ ).

Например, модель

$$\langle v^*, q, P(S), \text{ЛПР} \rangle$$

определяет задачу ВОВ при скалярном критерии  $q$  с заданием возможных ситуаций и их вероятностей, решаемую ЛПР.

Число возможных моделей задач принятия решений определяется мощностью множества  $\mathcal{K}$ , представляющего собой декартово произведение четырех множеств, т. е.

$$\mathcal{K} = \mathcal{W} \times \mathcal{F} \times \mathcal{N} \times \mathcal{U},$$

в котором  $\mathcal{W} = \{v^*; \mathcal{V}_0\}$ ;  $\mathcal{F} = \{q, Q, C, X\}$ ;  $\mathcal{N} = \{S, P(S), 1\}$  и  $\mathcal{U} = \{\text{ЭК} + \text{ЛПР}; \text{ЛПР}, \text{ЭК}\}$ .

Исходные данные задачи  $K \in \mathcal{K}$  представляют собой массив реквизитов вида

$$R = \{n, (n_0), \text{extr}, \mathbf{M}_q, (\mathbf{M}_Q, M_x), n_s, (\mathbf{M}_p), U\}, \quad (4.7)$$

где  $n_0$  — число предпочтительных вариантов, или мощность множества  $\mathcal{V}_0$ ;  $\text{extr}$  — характер задачи на минимум или максимум;  $\mathbf{M}_p(\mathbf{M}_Q)$  — матрицы значений критериев;  $M_x$  — массивы статистических данных;  $n_s$  — число ситуаций;  $\mathbf{M}_p$  — матрица вероятностей ситуаций;  $U$  — лицо или группа лиц, принимающих решение (ЛПР, ЭК, ЭК + ЛПР). В круглые скобки в (4.7) заключены те компоненты массива  $R$ , которые не требуются для решения некоторых задач. В частных случаях матрицы  $\mathbf{M}_q$ ,  $\mathbf{M}_Q$  и  $\mathbf{M}_p$  могут задаваться интервальными значениями.

Модель задачи (4.6) и массив реквизитов (4.7) позволяют перейти к созданию компьютерных технологий, обеспечивающих оперативное решение задач принятия проектных решений. Вместе с тем модель (4.6) не следует рассматривать как окончательную, так как в нее можно вводить новые элементы с целью учета ряда частных особенностей некоторых задач. К таким особенностям могут быть отнесены:

- число альтернативных вариантов  $n$  к началу решения задачи может быть неизвестно и множество  $\mathcal{V}$  формируется в ходе решения задачи, это обстоятельство нетрудно учесть расширением множества  $\mathcal{W}$  видов задач;
- во многих случаях вследствие недостоверности исходных данных значения  $\mathbf{M}_q$ ,  $P_s$  и другие задаются интервалами, это можно учесть введением дополнительных параметров в множества  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{N}$ ;
- решение задачи выбора оптимального варианта может быть совмещено с проверкой выполнения некоторых ограничений, в том числе и при различных условиях эксплуатации, когда сначала требуется определить допустимые варианты решения.

В общем случае множество  $\mathcal{V}$  наряду с вариантами проектных решений может включать и варианты решений

организационного характера, в частности сбора дополнительной информации, макетирования, моделирования и т. п. Большое значение для принятия обоснованного решения имеет выбор метода, который наиболее соответствует рассматриваемой задаче. В ряде случаев целесообразно решать задачу различными методами и по их результатам принимать окончательные решения.

#### **4.2.1. Методы принятия решений в условиях полной неопределенности**

Понятие «полной неопределенности» исходных данных является достаточно условным, более точным его выражением служит высокая степень неопределенности, характерная для фазы формирования концепции проекта, когда исходных данных для принятия обоснованного решения недостаточно, имеющиеся сведения недостоверны, возможные риски полностью не определены, а на результаты могут влиять действия возможных конкурентов и т. д. Аналогичная неопределенность может иметь место при сравнении инвестиционных проектов, когда критерии сопоставления вариантов (текущая стоимость, период окупаемости, внутренняя ставка доходности, прогнозируемая прибыль и т. д.) четко не сформулированы.

Как уже отмечалось, широкое распространение при решении задач ВОВ и ВПВ в условиях полной неопределенности находят методы экспертных оценок, в частности с использованием ранжирования вариантов или парных сравнений. Существенную роль в применении этих методов играет вид критерия для сравнения альтернативных вариантов. Здесь возможны два случая:

- 1) критерий задается в форме словесной формулировки цели проекта или в виде скалярной величины (принятие решения при скалярном критерии);
- 2) критерий сравнения вариантов представляет собой векторную величину.

Методы экспертных оценок и другие родственные им методы объединяет то, что основой для решений экспертов в большей степени служит качественная информация.

Вместе с тем для обработки мнений экспертов применяют такие математические методы, как корреляционный анализ, проверка статистических гипотез, многокритериальная оптимизация и др.

На практике широко распространен метод экспертных оценок, основанный на ранжировании вариантов. Этим методом при скалярном критерии  $q$ , а также в случае словесной формулировки цели ( $C$ ) оперативно решается широкий круг задач ВОВ и ВПВ в условиях полной неопределенности, в частности задач с моделями (4.6). Ранжирование удобно применять, когда значение критерия для сравниваемых вариантов нельзя непосредственно измерить или вычислить [3].

Пусть имеется группа из  $m$  экспертов (не менее двух) и множество вариантов решения  $\mathcal{V} = \{v(i), i = 1, \dots, n\}$ . Сформулирована целевая функция принятия решения в виде критерия  $q$  или цели  $C$ . В результате сопоставления вариантов по критерию  $q$  на основе накопленного опыта и профессиональных знаний каждый  $j$ -й эксперт определяет начальный вектор  $y_j$  рангов вариантов в виде

$$y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jn}), j = 1, \dots, m,$$

где  $y_{ji}$  — ранг варианта  $v_i$  решения, присваиваемый  $j$ -м экспертом, при этом  $y_{jh} < y_{jt}$ , если вариант  $v_h$  предпочтительнее варианта  $v_t$  по критерию  $q$ . Допускается равенство рангов  $y_{jh} = y_{jt}$  при  $h \neq t$ , а также отсутствие значений  $y_{ji}$  (знак «-») для вариантов, которые  $j$ -й эксперт считает неперспективными.

Векторы  $y_j, j = 1, \dots, m$  образуют матрицу рангов размерностью  $m \times n$ :

$$Y = \|y_{ji}\|_{m \times n}, y_{ji} \in \{1, 2, \dots, n; (-)\}. \quad (4.8)$$

Требуется по значениям компонентов матрицы  $Y$  определить:

- оптимальный вариант  $v^*$  или сформировать подмножество предпочтительных вариантов  $\mathcal{V}_0$ , содержащее оптимальное решение;
- совокупные рейтинги вариантов;
- степень согласованности мнений экспертов.

Ранжирование множества вариантов  $\mathcal{V}$  заключается в нумерации вариантов  $v_i$  в соответствии с возрастанием (или убыванием) некоторого критерия  $q$ . Ранг варианта  $v_i$  указывает место, которое он занимает среди других вариантов, расположенных в соответствии с рассматриваемым критерием. Так как эксперт может присвоить одинаковые ранги отдельным вариантам, или вовсе не указать ранг, то матрицу (4.8) необходимо привести к виду, удобному для дальнейшей обработки. Для этого каждый вектор  $u_j$  преобразуется в вектор

$$x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}), j = 1, \dots, m,$$

для которого должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i=1}^n x_{ji} = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (4.9)$$

При таком ранжировании число рангов должно соответствовать числу вариантов решения, а их сумма — сумме чисел натурального ряда.

Например, ранги  $y_{ji}$ , проставленные  $j$ -м экспертом и занесенные в исходную матрицу рангов  $Y$  для  $n=6$ , равны  $y_j = (2, 1, 1, -, -, -)$  и не удовлетворяют условию (4.9), после нормирования они имеют вид  $x_j = (3; 1,5; 1,5; 5; 5; 5)$ , т. е. выполняется условие

$$\sum_{i=1}^6 x(j, i) = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21.$$

В данном примере последовательность рангов  $y_j$  преобразуется в нормированный ряд  $x_j$  следующим образом. Эксперт поставил второй  $v_2$  и третий  $v_3$  варианты на первое место (две единицы в ряду  $y_j$ ). В нормированном ряду два лучших варианта в сумме должны давать  $1+2=3$ . Поэтому им присваиваются одинаковые значения  $x_{j2} = x_{j3} = 3/2 = 1,5$ . На третье место эксперт определил первый вариант, поэтому  $x_{j1} = 3$ . Остальные варианты эксперт признал неперспективными и отвел им 4, 5 и 6-е место, т. е.  $x_{j4} = x_{j5} = x_{j6} = (4+5+6)/3 = 5$ .



Степень согласованности мнений  $m$  экспертов при ранжировании вариантов оценивается с помощью коэффициента конкордации  $W_K$  (при  $m=2$  используются также коэффициенты ранговой корреляции по Спирмену или по Кендаллу). Если все эксперты одинаково проранжировали варианты, т. е. их мнения полностью совпадают, то  $W_K=1$ , если нет связи между рангами  $x_j$ ,  $j=1, \dots, m$ , т. е. имеет место сильное расхождение мнений экспертов, то значение  $W_K$  близко к нулю. Таким образом, значения коэффициента  $W_K$  принадлежат интервалу  $[0; 1]$ .

Если компетентность экспертов не учитывается, то расчет коэффициента конкордации производится по формуле

$$W_K = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^m x_{ji} - m(n+1)/2 \right]^2}{\frac{1}{12} m^2 n (n^2 - 1) - m \sum_{j=1}^m T_j}; \quad (4.10)$$

$$T_j = \frac{\sum_{i=1}^m t_{ji} (t_{ji}^2 - 1)}{12}, \quad j=1, \dots, m,$$

где  $t_{ji}$  — число повторений рангов  $x_{ji}$  в  $j$ -м ряду.

Если компетентность экспертов учитывается введением весовых коэффициентов  $c_j$ ,  $j=1, \dots, m$ , то коэффициент  $W_K$  рассчитывается следующим образом:

$$W_K = \frac{12 \sum_{i=1}^n d_i^2}{\left[ m^2 n (n^2 - 1) - 12 m \sum_{j=1}^m T_j \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{m} \right]^2}; \quad (4.11)$$

$$d_j = \sum_{i=1}^m c_j x_{ji} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_j x_{ji}.$$

Веса  $c_j$  могут определяться различными способами, например на основе учета квалификации, уровня образования, стажа работы по специальности и т. д. Для опреде-

ления  $c_j$ ; можно использовать тесты или методы ранжирования другой группой экспертов.

Достоверность предположения о согласованности мнений экспертов проверяется методами проверки статистических гипотез. Для проверки гипотезы о значимости коэффициента конкордации  $W_k$  (4.10) или (4.11), т. е. что  $W_k$  существенно больше нуля, может использоваться  $Z$ -критерий Фишера и критерий хи-квадрат Пирсона (или  $\chi^2$ ). В первом случае в качестве критической статистики используется величина

$$\hat{z} = \frac{0,5 \ln(n+1)W_k}{1 - W_k}, \quad (4.12)$$

имеющая  $Z$ -распределение с числами степеней свободы

$$v_1 = n - 1 \text{ и } v_2 = (m - 1)v_1, \quad (4.13)$$

где  $n$ ,  $m$  — число вариантов и экспертов соответственно.

Во втором случае рассматривается величина

$$\hat{\chi}^2 = m(n-1)W_k, \quad (4.14)$$

подчиняющаяся распределению Пирсона с

$$v = n - 1 \quad (4.15)$$

степенями свободы.

Проверка значимости коэффициента конкордации  $W_k$  производится в следующем порядке.

1. Выбирается статистический критерий (Фишера или Пирсона). При  $n \geq 7$  рекомендуется использовать критерий Пирсона.

2. По формуле (4.12) или (4.14) рассчитывается оценка критической статистики (т. е.  $\hat{z}$  или  $\hat{\chi}^2$ ).

3. Задается уровень значимости  $100\alpha$ , %, рассчитывается число степеней свободы  $v$  по формулам (4.13) или (4.15) и по соответствующей таблице критерия определяется его значение. Например, для критерия Пирсона по значениям  $v = n - 1$  и  $100\alpha$ , %, определяется  $\chi^2_T(v, \alpha)$ . При экспертных оценках рекомендуется брать  $\alpha = 0,01$ ;  $0,025$  или  $0,05$  (соответственно уровни значимости 1; 2,5 или 5%).

4. Принимается решение: если  $\hat{\chi}^2 \geq \chi^2_T(v, \alpha)$ , то нулевая гипотеза отвергается и коэффициент конкордации

$W_k$  значим при соответствующем значении  $100\alpha, \%$ ; если  $\hat{\chi}^2 < \chi^2_T(v, \alpha)$ , то имеет место нулевая гипотеза и  $W_k$  незначим.

Для облегчения принятия решения по результатам высказываний экспертов рассчитываются результирующие (суммарные) и средние ранги вариантов, т. е.

$$x_{S_i} = \sum_{j=1}^m x_{ji} \quad \text{и} \quad \bar{x}_i = \frac{1}{m} x_{S_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

По значениям  $x_{S_i}$  и  $\bar{x}_i$  оцениваются рейтинги вариантов  $R_i$ . В случае значимого коэффициента  $W_k$  используется формула

$$R_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{x_{ji}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а при незначимом  $W_k$  расчет ведется по формуле

$$R_i = \frac{1}{x_{S_i}} \sum_{i=1}^n x_{S_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Качество проектируемых ЭС и их частей обычно оценивается большим числом показателей, выражающих различные свойства объекта — целевое назначение, помехозащищенность, пропускная способность, надежность и пр. Комплекс показателей качества может включать как количественные величины определенной размерности и безразмерные (относительные) величины, так и качественные показатели, например оценивающие эргономику и представляемые в баллах. При сравнении вариантов проектных решений комплекс частных показателей качества записывается в виде векторного критерия с  $k$  компонентами, т. е.  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ . В критерий  $Q$  рекомендуется включать минимальное число наиболее важных частных показателей  $q_i, i = 1, \dots, k$ , причем отобранные показатели должны иметь ясный смысл и характеризовать конкретные свойства.

Компоненты вектора  $Q$  по отношению предпочтительности их значений для проектируемых ЭС могут быть двух видов: монотонно убывающие (масса, энергопотребление, стоимость и пр.) и монотонно возрастающие (быстродей-

ствие, чувствительность, вероятность безотказной работы и др.). В дальнейшем будем полагать, что все частные критерии  $q_i$  принимают положительные значения, т. е.  $q_i > 0$ , являются монотонно убывающими (чем меньше  $q_i$ , тем лучше), в идеальном случае  $q_i \rightarrow 0$ . Для сокращения размерности вектора  $Q$  отдельные показатели могут рассматриваться в виде ограничений.

В общем случае многокритериальность в задачах принятия проектных решений может рассматриваться в следующих аспектах:

1) непосредственно в смысле векторного критерия  $Q$  с  $k$  частными показателями;

2) как результаты работы отдельных экспертов по скалярному критерию  $q$ , т. е. пусть  $r_{ji}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $i = 1, \dots, n$  — нормированные ранги, выставленные  $m$  экспертами  $n$  вариантам, тогда для варианта  $v_i$  можно рассматривать  $m$ -вектор показателей

$$Q_3(v_i) = (r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{mi});$$

3) результаты оценок вариантов различными методами при скалярном критерии  $q$  в этом случае

$$Q_m(v_i) = [q_1(v_i), q_2(v_i), \dots, q_\mu(v_i)],$$

где  $q_j(v_i)$ ,  $j = 1, \dots, \mu$  — значения показателей варианта  $v_i$ , полученные различными методами;  $\mu$  — число используемых методов;

4) при сравнении значений скалярного критерия  $q_{is}$  на множестве ситуаций  $S$ .

Во всех рассмотренных случаях оптимальный вариант  $v^*$  обычно определяется на основе «компромисса» между частными показателями. Наибольшее развитие получили алгоритмы решения многокритериальных задач, использующие метод оптимизации по Парето; свертки векторного критерия в скалярный; выделения наиболее важного частного показателя в качестве основного и наложение ограничений на остальные показатели.

Многокритериальные задачи принятия проектного решения с использованием метода оптимизации по Парето обычно решаются в два этапа. На первом этапе форми-

руется подмножество  $\mathcal{V}^n$  Парето-оптимальных вариантов. На втором этапе применяется один из способов сведения векторного критерия  $Q$  в скалярный  $q$ , после чего используются методы для скалярных критериев.

Для задач ВПВ (4.3) второй этап зависит от соотношения между мощностями множеств  $\mathcal{V}^n$  (получается в результате первого этапа) и  $\mathcal{V}_0$  (задается условиями задачи). Если  $|\mathcal{V}^n| = |\mathcal{V}_0|$ , то второго этапа не требуется и  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}^n$ . Если  $|\mathcal{V}^n| > |\mathcal{V}_0|$ , то выполняются работы второго этапа с вариантами  $v \in \mathcal{V}^n$ . Если же  $|\mathcal{V}^n| < |\mathcal{V}_0|$ , то расчеты начинаются с первого этапа для элементов  $v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^n$  с целью выделения подмножества вариантов  $\mathcal{V}'_0$ , для которого имеет место  $|\mathcal{V}'_0| = |\mathcal{V}_0| - |\mathcal{V}^n|$ .

Рассмотрим формирование подмножества Парето-оптимальных вариантов  $\mathcal{V}^n$  на примере работы одного эксперта при ранжировании вариантов отдельно по всем частным критериям  $q_j, j=1, \dots, k$ , в результате такого ранжирования получается матрица рангов

$$\mathbf{R} = \|r_{ji}\|_{k \times n},$$

где  $r_{ji}$  — ранг  $i$ -го варианта по  $j$ -му показателю.

Чем ранг меньше, тем вариант считается лучше, поэтому из двух вариантов  $v_i$  и  $v_v$ , характеризующихся столбцами матрицы  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{bmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ \vdots \\ r_{ki} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} r_{1v} \\ r_{2v} \\ \vdots \\ r_{kv} \end{bmatrix},$$

вариант  $v_i$  является предпочтительнее ( $v_i \succ v_v$ ), если для всех  $j=1, \dots, k$  выполняется условие:  $r_{ji}$  меньше или равно  $r_{jv}$ , причем хотя бы по одному частному критерию должно выполняться строгое неравенство  $r_{ji} < r_{jv}$ .

В случае когда по отдельным частным критериям предпочтительнее вариант  $v_i$ , а по другим — вариант  $v_v$ , то варианты  $v_i$  и  $v_v$  считаются равными или эквивалентными относительно векторного критерия  $Q$ :  $v_i \sim v_v$ .

Вариант  $v_i^*$  считается оптимальным, если он предпочтительнее по отношению к остальным  $n-1$  вари-

антам, и оптимальным по Парето, если для него нет предпочтительных вариантов. Если имеется несколько вариантов, для которых нет предпочтительных, то эти варианты образуют подмножество вариантов  $\mathcal{V}^n$ , оптимальных по Парето ( $\mathcal{V}^n \subseteq \mathcal{V}$ ). Алгоритм формирования подмножества  $\mathcal{V}^n$  следующий.

1. Сопоставляются варианты  $v_1$  и  $v_2$ . Если  $v_1 \sim v_2$ , то переходят к сравнению  $v_1$  с  $v_3$ . Если  $v_1 \succ v_2$ , то вариант  $v_2$  из дальнейшего рассмотрения исключается. Если же  $v_2 \succ v_1$ , то из рассмотрения исключается  $v_1$ .

2. Аналогичным образом вариант  $v_1$  попарно сопоставляется с остальными вариантами  $v_3, \dots, v_n$ . Все варианты  $v_i$ , для которых имеет место  $v_i \prec v_1$ , исключаются из дальнейшего анализа. В результате сравнений варианта  $v_1$  с другими вариантами  $v_i, i=2, \dots, n$ , первый вариант либо включается в подмножество  $\mathcal{V}^n$ , либо выбывает, если имеется вариант  $v_i \succ v_1$ . В случае, когда имеет место  $v_1 \succ v_i, i=2, \dots, n$ , то  $v_1$  является оптимальным вариантом  $v^*$ .

3. Таким же образом производится попарное сравнение второго варианта (если  $v_2 \sim v_1$  или  $v_2 \succ v_1$ ) с оставшимися  $v_i, i=3, \dots, n$ , и т. д.

Аналогично подмножество  $\mathcal{V}^n$  формируется и для других случаев. Заметим, что в задачах на максимум, когда  $q_j$  играют роль «эффективностей», вариант  $v_i$  предпочтительнее  $v_v$  ( $v_i \succ v_v$ ), если для всех  $j=1, m$  выполняется условие  $q_{ji} \geq q_{jv}$ , причем хотя бы по одному частному  $k$ -му критерию  $q_{ki} > q_{kv}$ .

Следует подчеркнуть, что при формировании  $\mathcal{V}^n$  все частные показатели должны быть ориентированы или только на максимум (эффективность), или только на минимум (затраты, ранги и т. д.).

Для свертывания векторного критерия  $Q$  на втором этапе решения многокритериальных задач обычно используются аддитивный и мультипликативный способы.

При аддитивном способе свертывание выполняется путем сложения значений частных показателей с соответствующими весами. Как правило, частные критерии имеют различную физическую природу и в соответствии с этим и различную размерность, поэтому при формировании обоб-

ценного критерия оперируют не с «натуральными» критериями, а с их нормированными значениями. Нормирование частных показателей производится путем отношения «натурального» критерия к некоторой нормирующей величине, измеряемой в тех же единицах, что и сам критерий.

Обычно применяются три подхода к выбору нормирующего делителя. В соответствии с первым подходом в качестве нормирующего делителя принимаются некоторые директивные значения параметров. Второй подход предполагает выбор в качестве нормирующих делителей максимальных значений критериев, достигаемых в соответствующих областях. При третьем подходе в качестве нормирующих делителей выбирают разность между максимальным и минимальным значениями критерия. Выбор подхода к формированию безразмерной формы частных критериев в значительной степени носит субъективный характер и должен быть обоснован в каждом конкретном случае. Расчет аддитивного критерия для варианта  $v_i$  выполняется по формуле

$$q_a(v_i) = \sum_{v=1}^k c_v \frac{q_v(v_i)}{q_v^{(0)}(v_i)},$$

здесь  $c_v$  — весовой коэффициент  $v$ -го частного критерия;  $q_v^{(0)}(v_i)$  —  $v$ -й нормирующий делитель.

Введением весовых коэффициентов  $c_v$  учитывают различную значимость частных показателей при формировании аддитивного критерия. Определение весовых коэффициентов часто затруднено и обычно сводится к использованию формальных процедур или к применению экспертных оценок. Аддитивный критерий имеет ряд недостатков, главный из которых состоит в том, что критерий  $q_a$  не вытекает из объективной роли частных показателей и выступает как формальный математический прием, придающий задаче удобный для решения вид. Другой недостаток заключается в том, что может происходить взаимная компенсация частных критериев. Это значит, что значительное уменьшение одного из критериев вплоть до нулевого значения может быть компенсировано возрастанием другого критерия. Для ослабления этого недостатка

вводят ограничения на минимальные значения частных критериев и их весовых коэффициентов.

Мультипликативный способ предполагает перемножение частных критериев, т. е.

$$q_m(v_i) = \prod_{v=1}^k q_v(v_i).$$

В случае неравноценности частных показателей вводятся весовые коэффициенты  $c_v$  и мультипликативный критерий принимает вид

$$q_m(v_i) = \prod_{v=1}^m q_v^{c_v}(v_i).$$

Достоинством мультипликативного критерия является то, что при его использовании не требуется нормировка частных показателей, а к его недостаткам следует отнести то, что критерий компенсирует недостаточную величину одного частного показателя избыточной величиной другого и имеет тенденцию сглаживать уровни частных критериев за счет их неравнозначных первоначальных значений.

В общем случае задача свертывания векторного критерия  $Q$  в скалярный  $q_a$  или  $q_m$  является достаточно сложной и не имеет однозначного решения.

При рассмотрении вариантов сложных проектов наиболее трудоемкая процедура ранжирования  $n$  альтернатив может заменяться многократным использованием более простой процедуры сравнения двух вариантов между собой, т. е. применением метода экспертных оценок, основанного на парных сравнениях. Достоинства этого метода особенно проявляются при векторных критериях оптимальности  $Q$  большой размерности и большом числе вариантов  $n$ .

Пусть сравниваются два варианта  $v_p, v_h$  из множества  $\mathcal{V}$ , причем вариант  $v_p$  по заданным критериям предпочтительнее варианта  $v_h$ , т. е.  $v_p \succ v_h$ .

В ходе экспертизы каждый эксперт заполняет таблицу с результатами парных сравнений, образующих матрицу размерностью  $n \times n$ :



$$\mathbf{Z} = \|z_{hp}\|_{n \times n},$$

где

$$z_{hp} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_h \text{ предпочтительнее } v_p (v_h \succ v_p), \\ 0, & \text{если } v_p \succ v_h, \\ -, & \text{если } v_h = v_p. \end{cases}$$

Для  $j$ -го эксперта матрицу  $\mathbf{Z}$ , характеризующую результаты парных сравнений, обозначим  $\mathbf{Z}_j$  и представим в виде

$$\mathbf{Z}_j = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & \dots & v_p & \dots & v_n \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_h \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & z_{12;j} & \dots & z_{1p;j} & \dots & z_{1n;j} \\ z_{21;j} & - & \dots & z_{2p;j} & \dots & z_{2n;j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{h1;j} & z_{h2;j} & \dots & z_{hp;j} & \dots & z_{hn;j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1;j} & z_{n2;j} & \dots & z_{np;j} & \dots & - \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.16)$$

В качестве примера ниже показан вид матрицы  $\mathbf{Z}_j$  для  $n=4$  вариантов:

$$\mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 1 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \end{bmatrix}.$$

Элементы данной матрицы означают, что эксперт при сравнении вариантов  $v_1$  и  $v_2$  отдал предпочтение первому варианту ( $v_1 \succ v_2$ ), поэтому  $z_{12;j}=1$ , при сравнении  $v_1$  с  $v_3$  — третьему ( $v_1 \prec v_2$ ) и, следовательно,  $z_{13;j}=0$ , при сравнении  $v_1$  с  $v_4$  — первому, т. е.  $z_{14;j}=1$  и т. д.

Матрица  $\mathbf{Z}_j$  обладает следующими свойствами:

- 1) главная диагональ заполнена знаками «-»;
- 2) если элемент  $z_{hp;j}=1$ , то  $z_{ph;j}=0$ ;
- 3) так как число парных сравнений вариантов равно числу сочетаний из  $n$  по 2, т. е.  $C_n^2 = n(n-1)/2$ , то матрица  $\mathbf{Z}_j$  содержит  $C_n^2$  единиц и  $C_n^2$  нулей.

Последнее свойство используется для проверки правильности заполнения матрицы экспертом, т. е.

$$\sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n z_{hp;j} = n(n-1)/2.$$

При сравнении вариантов  $v_h$  и  $v_p$  по векторному критерию необходимо учитывать число показателей, по которым  $v_h$  превосходит  $v_p$ , и важность частных показателей.

В результате работы  $m$  экспертов заполняется  $m$  матриц парных сравнений  $Z_j$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ . Обработка результатов экспертизы начинается с объединения этих матриц в одну обобщенную матрицу размерностью  $n \times n$ :

$$G = \|g_{hp}\|_{n \times n},$$

элементы которой получаются суммированием соответствующих значений матриц  $Z_j$ , т. е.

$$g_{hp} = \sum_{j=1}^m z_{hp;j}.$$

Математическую запись обобщенной матрицы  $G$  в общем виде можно представить как

$$G = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & \dots & v_p & \dots & v_n & \Sigma_1 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_h \\ \vdots \\ v_n \\ \Sigma_2 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} - & g_{12} & \dots & g_{1p} & \dots & g_{1n} & H_1 \\ g_{21} & - & \dots & g_{2p} & \dots & g_{2n} & H_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{h1} & g_{h2} & \dots & g_{hp} & \dots & g_{hn} & H_h \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{np} & \dots & - & H_n \\ P_1 & P_2 & \dots & P_p & \dots & P_n & \Sigma_3 \end{array} \right] & \end{matrix} \quad (4.17)$$

Как видно из математической записи, матрица  $G$  дополнительно содержит столбец  $\Sigma_1$  и строку  $\Sigma_2$ . Элементы  $H_1, \dots, H_n$  столбца  $\Sigma_1$  равны суммам элементов строк матрицы  $G$ , т. е.

$$H_h = \sum_{p=1}^n g_{hp},$$

а элементы  $P_1, \dots, P_n$  строки  $\Sigma_2$  равны суммам элементов столбцов матрицы  $\mathbf{G}$ :

$$P_p = \sum_{h=1}^n g_{hp}.$$

Матрица  $\mathbf{G}$  должна удовлетворять следующим свойствам.

1. Сумма элементов матрицы  $\mathbf{G}$  равна

$$\Sigma_3 = \sum_{h=1}^n \sum_{p=1}^n g_{hp} = mC_n^2 = \frac{mn(n-1)}{2}.$$

2. При полном согласии мнений экспертов в  $C_n^2$  элементах матрицы  $g_{hp} = m$ , а в остальных  $g_{hp} = 0$ .

3. При минимальном согласии каждый элемент матрицы  $\mathbf{G}$  содержит  $g = m/2$ , если  $m$  — четное число, и  $g = (m+1)/2$  или  $g = (m-1)/2$ , если  $m$  число нечетное.

4. Сумма из элементов  $i$ -го столбца и  $i$ -й строки постоянна для всех  $i$ :

$$\sum_{h=1}^n g_{hi} + \sum_{p=1}^n g_{ip} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$H_1 + P_1 = H_2 + P_2 = \dots = H_n + P_n.$$

5. Суммы элементов векторов  $\Sigma_1 = (H_1, \dots, H_n)$  и  $\Sigma_2 = (P_1, \dots, P_n)$  равны:

$$\sum_{h=1}^n H_h = \sum_{p=1}^n P_p = \Sigma_3.$$

С помощью матриц (4.16) и (4.17) вычисляются средняя частота предпочтения всякого варианта каждым экспертом и средний ранг фактора, полученный от всех экспертов.

При последующей обработке матрица  $\mathbf{G}$  преобразуется в матрицу, где варианты располагаются в порядке убывания значений  $H_h$ . При равенстве значений  $H_h$  на первое место ставится вариант  $v_h$ , в строке матрицы  $\mathbf{G}$  которого содержится  $g_{\max}$  и нет нулей, на второе место — вариант с  $g_{\max}$  и нулями, на третье место — вариант без  $g_{\max}$  и т. д.

Согласованность мнений экспертов при парных сравнениях оценивается с помощью коэффициента согласия  $W_{\Pi}$ , который рассчитывается по формуле

$$W_{\Pi} = \frac{4S}{m(m-1)n(n-1)},$$

в которой

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{g_{ij}}^2,$$

а число парных сравнений

$$C_{g_{ij}}^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } g_{ij} < 2; \\ 1, & \text{если } g_{ij} = 2; \\ g(g-1)/2, & \text{если } g_{ij} > 2. \end{cases}$$

Коэффициент  $W_{\Pi}$  может находиться в пределах от  $W_{\Pi \min}$  (при минимальном согласии экспертов) до 1 (полное согласие), т. е.  $W_{\Pi} \in [W_{\Pi \min}; 1]$ . Значение  $W_{\Pi \min}$  рассчитывается из соотношения

$$W_{\Pi \min} = \begin{cases} \frac{m-1}{2m}, & \text{если } m \text{ — нечетное;} \\ \frac{m-2}{2(m-1)}, & \text{если } m \text{ — четное.} \end{cases}$$

Оценка значимости коэффициента  $W_{\Pi}$ , т. е. определение, существенно ли он отличается от  $W_{\Pi \min}$  при больших  $m$  и  $n$ , производится с использованием критерия хи-квадрат. Для этого рассчитывается оценка критерия по результатам экспертизы:

$$\hat{\chi}^2 = \frac{4}{m-2} \left[ S - 0,5C_n^2 \cdot C_m^2 \frac{m-3}{m-2} \right]$$

и число степеней свободы:

$$v = C_n^2 \frac{m(m-1)}{(m-2)^2}.$$

Значение  $\hat{\chi}^2$  сравнивается с табличным  $\chi^2(v, \alpha)$ . Если  $\hat{\chi}^2 \geq \chi^2(v, \alpha)$ , то гипотеза о значимости  $W_{\Pi}$  (согласованности экспертных мнений) принимается, в противном случае, т. е. при  $\hat{\chi}^2 < \chi^2(v, \alpha)$ , — отвергается.

В общем случае методика проведения экспертизы для решения задач принятия проектных решений в условиях полной неопределенности включает следующие этапы [3]:

1) формирование множества альтернативных вариантов  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ;

2) определение задания для экспертизы, т. е. что требуется получить: оптимальный вариант  $v^*$ , множество предпочтительных вариантов  $\mathcal{V}_o$  или ранги  $r$ ;

3) задание целевой функции;

4) формирование экспертной группы;

5) выбор метода проведения экспертизы;

6) работа группы экспертов;

7) математическая обработка результатов экспертизы;

8) принятие решения по результатам экспертизы;

9) выделение вариантов для окончательного принятия решения;

10) формирование множества ситуаций;

11) расчет показателей эффективности вариантов в различных ситуациях;

12) определение оптимального варианта методами принятия решений в условиях полной неопределенности.

#### **4.2.2. Методы принятия решений в условиях частичной неопределенности**

На начальных этапах проектных работ по разработке новых ЭС используются различные методы принятия решений в условиях частичной неопределенности. Принимаемое решение в итоге зависит от метода его получения, однако следует иметь в виду, что зачастую далеко не всегда очевидно, какой метод является наилучшим для той или иной конкретной ситуации [3].

Если вероятности возможных ситуаций, в которых будут реализовываться результаты проекта, неизвестны и исходными данными для принятия решения служит

матрица эффективностей  $\mathbf{E} = \|e_{ij}\|_{n \times k}$ , в которой  $e_{ij}$  — эф-

фективность варианта  $v_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  в ситуации  $s_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , то используют такие широко известные методы, как равной вероятности, Гурвица и Шаньявского. Эти методы отличаются простотой, их можно применять, если допустим риск от неправильно выбранного варианта решения.

В методе равной вероятности оптимальным считается вариант  $v^*$ , для которого среднее значение эффективности по возможным ситуациям максимально, т. е.

$$v^* = \arg \max_{\bar{e}(v_i)} \left\{ \bar{e}(v_i) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e_{ij}, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Таким образом, в качестве критерия оптимальности варианта здесь выступает значение

$$q_{\text{рв}}(v_i) = \bar{e}(v_i).$$

Если вместо матрицы эффективности  $\mathbf{E}$  задается матрица затрат (потерь)  $\mathbf{G} = \|g_{ij}\|_{n, k}$ , то оптимальным считается вариант, для которого минимального значения достигает критерий

$$q_{\text{рв}}(v_i) = g(v_i) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k g_{ij}.$$

Заметим, что задачи с матрицей  $\mathbf{E}$  называют задачами на максимум, а с матрицей  $\mathbf{G}$  — на минимум.

В методе Гурвица в задаче на максимум роль критерия оптимальности играет взвешенное значение минимальной и максимальной эффективности варианта, т. е.

$$q_{\text{г}}(v_i) = c e_i^{\min} + (1 - c) e_i^{\max}, \quad c \in (0; 1);$$

$$e_i^{\min} = \min_j \{e_{ij}, j = \overline{1, k}\};$$

$$e_i^{\max} = \max_j \{e_{ij}, j = \overline{1, k}\},$$

где  $c$  — весовой коэффициент.

Для оптимального варианта имеет место

$$v^* = \arg \max_i \{q_r(v_i), i = \overline{1, n}\}.$$

Если решается методом Гурвица задача на минимум, то в качестве критерия оптимальности рассматривается взвешенное значение минимальных и максимальных затрат при реализации варианта, т. е.

$$q_r(v_i) = c g_i^{\min} + (1 - c) g_i^{\max}, \quad c \in (0; 1);$$

$$g_i^{\min} = \min_j \{g_{ij}, j = \overline{1, k}\};$$

$$g_i^{\max} = \max_j \{g_{ij}, j = \overline{1, k}\}.$$

Оптимальный вариант должен обладать минимальным средним значением затрат по его выполнению:

$$v^* = \arg \min_i \{q_r(v_i), i = \overline{1, n}\}.$$

Метод Шаньявского использует результаты, получаемые методом равной вероятности, с некоторой коррекцией. В задаче на максимум варианты сравниваются по критерию

$$q_{\text{ш}}(v_i) = c q_{\text{дв}}(v_i) + (1 - c) e_i^{\min},$$

а оптимальный вариант должен удовлетворять

$$v^* = \arg \max_i \{q_{\text{ш}}(v_i), i = \overline{1, n}\}.$$

В задаче на минимум критерий сравнения вариантов имеет вид

$$q_{\text{ш}}(v_i) = cq_{\text{дв}}(v_i) + (1-c)g_i^{\text{max}},$$

а для оптимального варианта имеет место

$$v^* = \arg \min_i \{q_{\text{ш}}(v_i), i = \overline{1, n}\}.$$

Метод Шаньявского, в отличие от методов равной вероятности и Гурвица, следует использовать в тех случаях, когда выбор оптимального варианта требует большей осторожности. Вместе с тем рассмотренные методы позволяют получить эффект, если решение по однотипной проблеме необходимо принимать достаточно часто, другими словами, выигрыш будет достигнут в среднем при многократном решении задач.

В качестве наглядного примера рассмотрим использование этих методов для матрицы эффективности, представленной ниже для трех ситуаций  $s_1 \dots s_3$  по четырем вариантам  $v_1 \dots v_4$ :

		$s_1$	$s_2$	$s_3$	$q_{\text{дв}}$	$q_{\text{Г}}$	$q_{\text{ш}}$
$\mathbf{E} =$	$v_1$	8	6	2	5,33	5	3,67
	$v_2$	7	5	3	5	5	4
	$v_3$	6,5	4	4,5	5	5,5	4,5
	$v_4$	7	2	4,5	4,5	4,5	3,25

Справа от матрицы дополнительными столбцами приведены рассчитанные значения критериев  $q_{\text{дв}}(v_i)$ ,  $q_{\text{Г}}(v_i)$  и  $q_{\text{ш}}(v_i)$  при  $c = 0,5$ . Легко видеть, что по критерию равной вероятности следует отдать предпочтение первому варианту, для которого  $v_1^* = 5,33$ , а по критериям Гурвица и Шаньявского — третьему варианту, для которого значения по данным критериям составляют  $v_{3(\text{Г})}^* = 5,5$  и  $v_{3(\text{ш})}^* = 4,5$  соответственно.

Когда большую роль играют последствия ошибочных решений, которые могут иметь место, в отличие от случая известной заранее ситуации, применяется метод Сэвиджа. Построение матрицы  $\mathbf{R}$  последствий ошибочных решений, когда критерий  $q$  соответствует эффективности (т. е. задача на максимум), производится следующим образом:



1) для каждого столбца матрицы  $\|e_{ij}\|_{n \times k}$  находятся максимальные элементы, т. е.

$$e_{i1}^{\max}, e_{j2}^{\max}, \dots, e_{vk}^{\max}; \tag{4.18}$$

2) из элементов (4.18) вычитаются другие элементы соответствующих столбцов, в результате получаем элементы матрицы  $\mathbf{R}$ , т. е.

$$r_{11} = e_{i1}^{\max} - e_{11}; r_{21} = e_{i1}^{\max} - e_{21} \text{ и т. д.}$$

В качестве показателей вариантов  $q_c(v_i)$  рассматриваются максимальные значения в строках матрицы  $\mathbf{R}$ , причем предпочтительным считается вариант с минимальным значением показателя, т. е.

$$v^* = \arg \min_i (q_c(v_i), i = \overline{1, n}), \tag{4.19}$$

$$q_c(v_i) = \max_j \{r_{ij}\}.$$

Пример заполненной матрицы  $\mathbf{R}$  последствий ошибочных решений показан ниже для трех ситуаций  $s_1 \dots s_3$  по четырем вариантам  $v_1 \dots v_4$ , в которой дополнительным столбцом справа приведены рассчитанные значения критерия Сэвиджа.

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & q_c \\ v_1 & \left( \begin{matrix} 8 & 6 & 2 \end{matrix} \right) & 2,5 \\ v_2 & \left( \begin{matrix} 7 & 5 & 3 \end{matrix} \right) & 1,5 \\ v_3 & \left( \begin{matrix} 6,5 & 4 & 4,5 \end{matrix} \right) & 2 \\ v_4 & \left( \begin{matrix} 7 & 2 & 4,5 \end{matrix} \right) & 4 \end{matrix}.$$

В соответствии с (4.19) оптимальным по методу Сэвиджа является вариант  $v_2$ .

Если рассматриваемая проблема имеет большое значение, цена риска принять неправильное решение исключительно высока, решение реализуется однократно, необходимо учитывать возможные ситуации, вероятности которых неизвестны, при этом значения матрицы эффективности  $\mathbf{E}$  (или затрат  $\mathbf{G}$ ) достаточно достоверны, то

обычно применяются методы теории игр. В случае решения задачи на максимум с использованием матрицы  $\mathbf{E}$  применяется максиминный критерий, означающий, что предпочтение отдается варианту, для которого наименьшее значение  $e_{i \min} = \min_j \{e_{ij}\}$  максимально, т. е.

$$v^* = \arg \max_i \left\{ \min_j \{e_{ij}\} \right\}.$$

Для задач на минимум с матрицей затрат  $\mathbf{G}$  используется минимаксный критерий, т. е.

$$v^* = \arg \min_i \left\{ \max_j \{g_{ij}\} \right\}.$$

В этом случае в каждой строке матрицы  $\mathbf{G}$  находятся максимальные значения затрат

$$g_{i \max} = \max_j \{g_{ij}\}$$

и выбирается вариант  $v^*$  с минимальным значением  $g_{i \max}$ .

Заметим, что в задачах на максимум может использоваться критерий в виде произведения элементов строк матрицы  $\mathbf{E}$ , т. е.

$$q_{\text{пр}}(v_i) = \prod_{j=1}^k e_{ij}$$

и определяется вариант

$$v^* = \arg \max_i (q_{\text{пр}}(v_i)).$$

Этот критерий целесообразно использовать в случаях, когда необходимо считаться со всеми ситуациями и допускается некоторый риск. Если отдельные элементы матрицы эффективностей  $\|e_{ij}\|_{n \times k}$  имеют отрицательные значения, то критерий можно использовать, перейдя от исходной к новой матрице

$$\|e_{ij} + a\|_{n \times k}, \quad a > \left| \min_{i,j} e_{ij} \right|.$$

В случаях, когда вероятности  $p(s_j)$ ,  $j=1, \dots, k$  ситуаций известны, достаточное распространение получил ме-

тод Байеса — Лапласа. В задачах на максимум варианты сравниваются по усредненным с учетом вероятностей значениям критерия, т. е.

$$q_{\text{БЛ}}(v_i) = \sum_{j=1}^k e_{ij} p(s_j),$$

и предпочтение отдается варианту

$$v^* = \arg \max_i \{q_{\text{БЛ}}(v_i), i = 1, \dots, n\}.$$

В задачах на минимум

$$q_{\text{БЛ}}(v_i) = \sum_{j=1}^k g_{ij} p(s_j),$$

а оптимальным считается вариант

$$v^* = \arg \min_i \{q_{\text{БЛ}}(v_i), i = 1, \dots, n\}.$$

Применение метода Байеса — Лапласа целесообразно при выполнении следующих условий:

- 1) вероятности ситуаций  $p(s_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$  известны и их можно считать неизменными на период реализации проекта;
- 2) решение по проектированию подобных объектов принимается и реализуется часто;
- 3) риск от неправильно принятого решения не приводит к серьезным последствиям.

Метод Байеса — Лапласа часто используется в сочетании с другими методами. Например, в методе Ходжа — Лемана критерий определяется в виде взвешенного среднего между оценками, получаемыми методами Байеса — Лапласа и максимина (в задаче на максимум), т. е.

$$q_{\text{ХЛ}}(v_i) = c \sum_{j=1}^k q_{ij} p(s_j) + (1 - c) \min_j (e_{ij}(v))$$

и

$$v^* = \arg \max_i \left( c \sum_{j=1}^k e_{ij} p(s_j) + (1 - c) \min_j (e_{ij}(v)) \right).$$

Данный метод применяется в случаях, когда имеются некоторые предположения о вероятностях ситуаций  $p(s_j)$ ,  $j=1, \dots, k$ , принятое решение может реализоваться много раз и допускается некоторый риск.

Если рассматриваются значения потерь (затрат) в различных ситуациях и  $r_{ij} < 0$ , то можно использовать критерий Гермейера. Согласно этому критерию для каждой строки находится наименьшее значение в виде

$$q_{\text{гер}}(v_i) = \min_j (r_{ij} p(s_j)),$$

а затем определяется вариант  $v^*$  с максимальным значением  $q_{\text{гер}}(v_i)$ , т. е.

$$v^* = \arg \max_i (q_{\text{гер}}(v_i)).$$

Данный критерий можно использовать и при отдельных положительных значениях  $r_{ij}$ . В этих случаях подбирают некоторое число  $a > 0$  и матрицу  $\|r_{ij}\|_{n \times k}$  трансформируют в матрицу  $\|r_{ij} - a\|_{n \times k}$ , в которой все элементы отрицательны. Метод используется, когда вероятности ситуаций известны лишь приближенно и с ними надо считаться, решение реализуется один (или малое число) раз и допускается некоторый риск.

Достаточно широкое применение для выбора оптимального варианта находят методы, основанные на количественных показателях числовой шкалы предпочтений. Одним из них является метод анализа иерархий, или иерархического анализа *AHP (Analytic Hierarchy Process)* [27].

Рассмотрим этот метод на примере задачи выбора предприятия — поставщика ЭРИ. Пусть имеются четыре альтер-

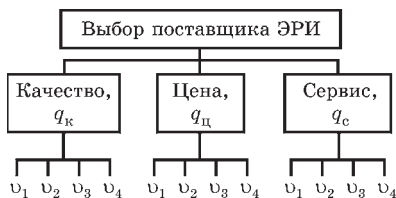


Рис. 4.1

Структуризация задачи по уровням иерархии

нативных варианта поставщика  $v_i$ ,  $i=1, 4$ , они оцениваются показателями трех категорий — качество  $q_k$ , цена  $q_c$  и сервис  $q_s$ . Данная задача характеризуется иерархией, структура которой приведена на рисунке 4.1.

Для установления предпочтения вводится шкала оценок, представленная в виде таблицы 4.1.

Таблица 4.1

**Шкала оценок предпочтений**

Вербальная формулировка предпочтений	Оценка в баллах
Отсутствие предпочтений	1
Умеренное предпочтение	2–3
Среднее предпочтение	4–5
Сильное предпочтение	6–7
Очень сильное предпочтение	9

Используя эти оценки, заполняется исходная матрица попарного сравнения критериев. Пусть качество ( $Q$  — *Quality*) несколько (средне) предпочтительнее сервиса ( $S$  — *Service*), а цена ( $P$  — *Price*) умеренно предпочтительнее сервиса. Эти предпочтения отражены матрицей  $A = \|a_{ij}\|_{3 \times 3}$ :

$$A = \begin{matrix} & Q & P & S \\ Q & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ P & \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ S & \begin{bmatrix} 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} \quad 7/4 \quad 10/3 \quad 8.$$

Дополнительной строкой в матрице  $A$  приведены суммарные значения критериев соответствующих столбцов.

По матрице  $A$  вычисляется скорректированная матрица  $A' = \|a'_{ij}\|_{3 \times 3}$  с весовыми коэффициентами  $c_i$ . Элементы  $a'_{ij}$  матрицы  $A'$  рассчитываются по формуле

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^3 a_{ij}},$$

а весовые коэффициенты определяются следующим образом:

$$c_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 a'_{ij}; \quad \sum_{i=1}^3 c_i = 1.$$

Таким образом, скорректированная матрица  $A'$  запишется в виде

$$A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} Q & P & S \end{matrix} & c_i \\ \begin{matrix} Q \\ P \\ S \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4/7 & 6/10 & 4/8 \\ 2/7 & 3/10 & 3/8 \\ 1/7 & 1/10 & 1/8 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0,557 \\ 0,320 \\ 0,123 \end{matrix} \end{matrix},$$

в которой весовые коэффициенты по каждому критерию выделены отдельным столбцом. В нашем примере весовые коэффициенты для качества, цены и сервиса соответственно равны 0,557; 0,320 и 0,123, т. е. качество считается важнее цены примерно в 1,7 раза и в 4,5 раза важнее сервиса.

Далее аналогичным образом по каждому критерию производится попарное сопоставление вариантов и вычисляются соответствующие весовые коэффициенты. Ниже приведены результаты сравнения вариантов по качеству (матрицы  $Q$  и  $Q'$ ), цене (матрицы  $P$  и  $P'$ ) и сервису (матрицы  $S$  и  $S'$ ).

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1 & 1/8 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$\sum_{j=1}^4 q_{ij} \quad \frac{131}{30} \quad \frac{25}{2} \quad 17 \quad \frac{39}{24};$$

$$Q' = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} & c_{Qi} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 30/131 & 2/5 & 6/17 & 8/39 \\ 6/131 & 2/25 & 2/17 & 4/39 \\ 5/131 & 1/25 & 1/17 & 3/39 \\ 90/131 & 12/25 & 8/17 & 24/39 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0,297 \\ 0,087 \\ 0,053 \\ 0,563 \end{matrix} \end{matrix};$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 9 \\ 1/5 & 1/7 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/9 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$\sum_{j=1}^4 p_{ij} \quad \frac{173}{40} \quad \frac{100}{63} \quad \frac{27}{2} \quad 20;$$

$$P' = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & c_{Pi} \\ v_1 & \left[ \begin{array}{cccc} 40/173 & 21/100 & 10/27 & 8/20 \end{array} \right] & 0,303 \\ v_2 & \left[ \begin{array}{cccc} 120/173 & 63/100 & 14/27 & 9/20 \end{array} \right] & 0,573 \\ v_3 & \left[ \begin{array}{cccc} 8/173 & 9/100 & 2/27 & 2/20 \end{array} \right] & 0,078 \\ v_4 & \left[ \begin{array}{cccc} 5/173 & 7/100 & 1/27 & 1/20 \end{array} \right] & 0,046 \end{matrix};$$

$$S = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 4 & 8 \end{array} \right] \\ v_2 & \left[ \begin{array}{cccc} 1/5 & 1 & 1/2 & 4 \end{array} \right] \\ v_3 & \left[ \begin{array}{cccc} 1/4 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \\ v_4 & \left[ \begin{array}{cccc} 1/8 & 1/4 & 1/5 & 1 \end{array} \right] \end{matrix};$$

$$\sum_{j=1}^4 s_{ij} \quad \frac{63}{40} \quad \frac{33}{4} \quad \frac{57}{10} \quad 18;$$

$$S' = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & c_{Si} \\ v_1 & \left[ \begin{array}{cccc} 40/63 & 20/33 & 40/57 & 8/18 \end{array} \right] & 0,597 \\ v_2 & \left[ \begin{array}{cccc} 8/63 & 4/33 & 5/57 & 4/18 \end{array} \right] & 0,140 \\ v_3 & \left[ \begin{array}{cccc} 10/63 & 8/33 & 10/57 & 5/18 \end{array} \right] & 0,213 \\ v_4 & \left[ \begin{array}{cccc} 5/63 & 1/33 & 2/57 & 1/18 \end{array} \right] & 0,050 \end{matrix}.$$

Затем с использованием весовых коэффициентов  $c_i$ ,  $c_{Qi}$ ,  $c_{Pi}$  и  $c_{Si}$  рассчитываются весовые коэффициенты  $R_i$  вариантов по формуле

$$R_i = c_1 c_{Qi} + c_2 c_{Pi} + c_3 c_{Si}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Результаты расчетов коэффициентов  $R_i$ , являющихся рейтингами поставщиков, приведены в таблице 4.2. Из сопоставления значений  $R_i$  видно, что наиболее предпочтительными вариантами поставки комплектующих ЭРИ являются  $v_1$  и  $v_4$ .

Достоинством метода АНР является то, что он наряду с объективными данными (цена, качество и т. п.) может использовать частично неопределенную и субъективную информацию, применять опыт, проницательность, интуицию экспертов и консультантов.

В зависимости от важности исследуемой проблемы, повторяемости решения задач, наличия информации о

Таблица 4.2

## Результаты расчета рейтингов

Варианты	Качество		Цена		Сервис	Весовой коэффициент $R_i$
$v_1$	$0,557 \cdot 0,297$	+	$0,320 \cdot 0,303$	+	$0,123 \cdot 0,597$	0,336
$v_2$	$0,557 \cdot 0,087$	+	$0,320 \cdot 0,573$	+	$0,123 \cdot 0,140$	0,249
$v_3$	$0,557 \cdot 0,053$	+	$0,320 \cdot 0,078$	+	$0,123 \cdot 0,213$	0,081
$v_4$	$0,557 \cdot 0,563$	+	$0,320 \cdot 0,046$	+	$0,123 \cdot 0,050$	0,334
Сумма						1,000

вероятностях ситуаций в таблице 4.3 приведены рекомендации по применению различных методов [3].

Для обработки статистических данных также используется многочисленная группа методов, в частности регрессионный, корреляционный и дисперсионный анализы, методы диаграмм рассеяния, проверки статистических гипотез, Монте-Карло и др. Некоторые из них рассмотрены в § 4.3.4 настоящего пособия. Каждый из этих методов имеет свои разновидности. Например, в методе регрессионного анализа выделяют случаи линейного и нелинейного, одномерного и многомерного регрессионного анализа. Метод дисперсионного анализа подразделяется на однофакторный, двухфакторный, трехфакторный и т. д.

Каждый метод эффективен для решения определенной группы задач. Так, при анализе существенности влияния

Таблица 4.3

## Рекомендации по применению различных методов

Важность проблемы	Вероятности ситуаций $p(s)$	Повторяемость задач	
		однократная	многократная
Высокая	Известны	ЭОПС, ММ, Ш	ЭОПС, БЛ, Ш
	Неизвестны	ЭОПС, ММ, Ш	ЭОПС, Ш, ММ
Средняя	Известны	ЭОПС, БЛ, ММ, С	ЭОР, БЛ, Г
	Неизвестны	ЭОПС, С, ММ, Ш	ЭОР, РВ, Г, Ш
Низкая	Известны	ЭОР, БЛ, ММ, С	ЭОР, БЛ, Г
	Неизвестны	ЭОР, Ш, РВ, Г, С	ЭОР, РВ, Г

ЭОПС — метод парных сравнений (экспертные оценки); ЭОР — метод ранжирования вариантов (экспертные оценки); ММ — метод максимина или минимакса (теория игр); БЛ — метод Байеса — Лапласа; РВ — метод равной вероятности; Г — метод Гурвица; Ш — метод Шанявского; С — метод Сэвиджа.



факторов на выходной показатель при большом числе факторов и значительном изменении  $Q$  удобно использовать метод диаграмм рассеяния, если же число факторов невелико и колебания  $Q$  незначительны, то эффективнее метод дисперсионного анализа.

При решении идентификации моделей важное значение имеет точность определения значений входных переменных. Если ошибками в их определении можно пренебречь, то целесообразно использовать методы регрессионного анализа, а в случае, когда входные переменные рассматриваются как случайные величины, применяются методы корреляционного анализа.

Методы проверки статистических гипотез используются в различных задачах, связанных с анализом случайных величин (идентификация закона распределения случайной величины, проверка существенности различий между параметрами распределения), построением доверительных интервалов, оценки степени согласованности мнений экспертов и др.

Во многих случаях на практике в ходе решения задачи проектирования поступает дополнительная информация, которую следует использовать для коррекции получаемых результатов. Для этого целесообразно применять методы, использующие итерационные процедуры пересчета показателей предпочтительности вариантов проектного решения на основе дополнительных сведений с учетом их достоверности [3]. К таким методам относятся методы байесовского подхода, Шортлифа — Бьюкенена, Демпстера — Шафера и др.

#### **4.2.3. Методы, основанные на байесовском подходе**

Пусть рассматривается задача выбора наиболее целесообразного варианта из множества альтернатив. При этом предварительный анализ на основе имеющейся информации показал, что достаточных оснований для выделения одного из вариантов в качестве оптимального нет. Это может быть связано с несогласованностью мнений экспертов (коэффициент конкордации низок) или с примерно одинаковыми значениями показателей эффек-

тивности вариантов при низкой достоверности исходных данных. В этих случаях целесообразно собрать дополнительные сведения и использовать методы, позволяющие корректировать результаты решения задачи с учетом новой поступающей информации.

Рассмотрим применение байесовского подхода на примере проведения последовательности экспертиз [3]. Пусть результаты работы группы экспертов показали несогласованность их мнений, и среди вариантов  $v \in \mathcal{V}$  нельзя однозначно выбрать конкретный в качестве оптимального. Тогда привлекают дополнительных экспертов и подсчитывают для каждой альтернативы среднюю апостериорную вероятность того, что этот вариант является предпочтительным. Процедуру продолжают до тех пор, пока средняя апостериорная вероятность одного из проектов  $v_a$  множества  $\mathcal{V}$  не будет существенно выше, чем для альтернативных вариантов. В этом случае проект  $v_a$  считается оптимальным.

Результат работы каждого дополнительно привлекаемого эксперта рассматривается как исход проведенного опыта, и расчет апостериорной вероятности производится по формуле Байеса, т. е.

$$P(H_i | A_j) = \frac{P(A_j | H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_j | H_i) \cdot P(H_i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.20)$$

где  $H_i$  — предположение (гипотеза) о том, что вариант  $v_i$  является оптимальным;  $A_j$  — результат экспертизы (событие) об оптимальности варианта  $v_j$ ;  $n = |\mathcal{V}|$  — число рассматриваемых вариантов (мощность множества  $\mathcal{V}$ );  $P(H_i)$ ,  $P(H_i | A_j)$  — априорная и апостериорная вероятности гипотезы  $H_i$  соответственно;  $P(A_j | H_i)$  — вероятность события  $A_j$ , если имеет место гипотеза  $H_i$  (правдоподобие).

Будем полагать, что событие  $A_j$  произошло, если вариант  $v_j$  очередной эксперт расположил на первом месте при  $n=2$  или  $n=3$ , и на первом или втором месте при  $n > 3$ . Если произошло противоположное событие  $\bar{A}_j$ , то апостериорная вероятность  $P(H_i | \bar{A}_j)$  гипотезы  $H_i$  при

данном событии рассчитывается по формуле, аналогичной (4.20), т. е.

$$P(H_i | \bar{A}_j) = \frac{P(\bar{A}_j | H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(\bar{A}_j | H_i) \cdot P(H_i)}. \quad (4.21)$$

По результатам работы очередного  $k$ -го эксперта рассчитываются усредненные апостериорные вероятности по формуле

$$\bar{P}_k(H_i | \mathcal{A}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(H_i^k | \tilde{A}_j), \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (4.22)$$

$$\mathcal{A} = \{\tilde{A}_j, j = \overline{1, n}\},$$

где  $\tilde{A}_j$  — событие, связанное с проверкой гипотезы  $H_j^k$ , т. е. того, что  $k$ -й эксперт вариант  $v_j$  поставит на одно из первых мест; для одной части слагаемых суммы имеет место  $A_j$ , а для другой —  $\bar{A}_j$ .

Вероятности  $P(H_i)$ ,  $P(H_i | A_j)$ ,  $P(H_i | \bar{A}_j)$  и  $\bar{P}_k(H_i | \mathcal{A})$  удовлетворяют условию полноты группы событий, т. е.

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1, \quad \sum_{i=1}^n P(H_i | A_j) = 1;$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i | \bar{A}_j) = 1, \quad \sum_{i=1}^n \bar{P}_k(H_i | \mathcal{A}) = 1;$$

$$P(A_j | H_i) + P(\bar{A}_j | H_i) = 1, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

В качестве оптимального варианта  $v^*$  после  $k$ -й экспертизы берется тот, для которого вероятность, рассчитанная по формуле (4.22), максимальна и выполняется условие, что некоторое заранее заданное число  $m$  последующих экспертиз не изменит соотношения

$$\bar{P}_{k+m}(H(v^*) | \mathcal{A}) = \max_{v_i \in \mathcal{V}} \{\bar{P}_{k+m}(H(v_i) | \mathcal{A})\},$$

где  $H(v^*)$  — гипотеза об оптимальности варианта  $v^*$ ,  $H(v_i) = H_i$ .

При использовании байесовского подхода для решения подобных задач важную роль играет формализация правила «остановки» в процессе проведения экспертиз. С одной стороны, своевременное прекращение итераций экономит средства, затрачиваемые на проведение экспертиз. С другой стороны, необходима уверенность, что дальнейшее привлечение экспертов не приведет к кардинальному изменению усредненной апостериорной вероятности и принятию другого варианта для реализации.

В этой ситуации наиболее естественно принимать решение по двум показателям: числу  $m$  дополнительных экспертов, высказывания которых могут изменить выбор оптимального варианта, и вероятности  $P_m$  того, что результаты высказываний этих экспертов приведут к изменению варианта, т. е. гипотезы, для которой усредненная апостериорная вероятность максимальна.

Определение показателей  $m$  и  $P_m$  выполняется при следующих допущениях:

1) в множестве  $\mathcal{V}$  можно выделить два наилучших варианта  $v_a$  и  $v_b$ ;

2) проведена обработка мнений  $k$  экспертов, при этом варианту  $v_a$  отдавалось предпочтение (исход  $A$ )  $k_a$  раз ( $k_a \leq k$ ) и варианту  $v_b$  (исход  $B$ ) —  $k_b$  раз ( $k_b < k_a$ ), т. е. по результатам  $k$  итераций вариант  $v_a$  считается предпочтительным (вероятность  $\bar{P}_k(H(v_a)|\mathcal{A})$  — максимальна);

3) в качестве вероятностей исходов  $A$  и  $B$  принимаются оценки:

$$P_a = \frac{k_a}{k}; \quad P_b = \frac{k_b}{k}, \quad (4.23)$$

причем вероятность  $P_a > 0,5$ ;

4) исходы  $A$  и  $B$  при последующих высказываниях экспертов являются независимыми и совместимыми;

5) очередность исходов в  $m$  экспертизах не влияет на конечный результат.

При данных допущениях, если выполняются условия:

$$\bar{P}_k(H(v_a)|\mathcal{A}) > \bar{P}_k(H(v_b)|\mathcal{A}), \quad k_a > k_b,$$

то соотношение

$$\bar{P}_{k+m}(H(v_a)|\mathcal{A}) < \bar{P}_{k+m}(H(v_b)|\mathcal{A}) \quad (4.24)$$

становится возможным при условии, что

$$m \geq (k_a - k_b) + 1. \quad (4.25)$$

Для определения вероятности  $P_m(b)$ , характеризующей возможность неравенства (4.24), используется комбинация моделей Бернулли для повторяющихся испытаний. Если имеет место  $\bar{P}_k(H(v_a)|\mathcal{A}) > \bar{P}_k(H(v_b)|\mathcal{A})$ ,  $k_a > k_b$  и  $m \geq 2$ , то вероятность выполнения неравенства (4.24) при минимальном значении  $m$  определяется формулой

$$P_m(b) = (1 - P_a)^m \cdot P_b^m. \quad (4.26)$$

Равенство (4.26) означает, что все  $m$  привлекаемых дополнительно экспертов выскажутся отрицательно относительно варианта  $v_a$  (исходы  $A$ ) и положительно относительно  $v_b$  (исходы  $B$ ). Формула (4.26) непосредственно следует из распределения вероятностей возможных сложных событий при  $m$  испытаниях, в которых события  $A$  и  $B$  могут принимать по два исхода с разными вероятностями. Такое распределение при использовании моделей Бернулли для событий  $A$  и  $B$  имеет следующий вид:

$$P_m(b) = \sum_{v=0}^m C_m^v P_a^v (1 - P_a)^{m-v} \sum_{v=0}^m C_m^v P_b^v (1 - P_b)^v, \quad (4.27)$$

где

$$C_m^v = \frac{m!}{v!(m-v)!}; \quad C_m^m = 1; \quad C_m^0 = 1.$$

Следует заметить, что вероятности  $P_a$  и  $P_b$  (4.23) необходимо корректировать после каждой итерации.

В качестве численного примера использования байесовского подхода рассмотрим следующую задачу [3].

Пусть из множества проектов  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_7\}$  предварительной экспертизой выделено подмножество предпочтительных  $\mathcal{V}^n = \{v_5, v_7\}$  проектов. Требуется, последовательно

привлекая дополнительных экспертов, определить один проект  $v^*$  для финансирования, имеющий максимальную усредненную апостериорную вероятность и удовлетворяющий условию (4.25) при  $m=2$ . Зададим следующие начальные (априорные) вероятности гипотез:

$$P(H_5^0) = P(H_7^0) = 0,25; \quad P(H_i^0) = 0,1, \quad i = \overline{1, 4; 6}.$$

Пусть событие  $A_5$  заключается в том, что очередной эксперт поставил рассматриваемый проект  $v_5$  на первое или второе место и

$$P(A_5 | H_5^0) = 0,8, \quad P(A_5 | H_i^0, i \neq 5) = 0,6.$$

Результаты работы первого эксперта приведены в таблице 4.4. Из таблицы видно, что эксперт 1 поставил вариант  $v_5$  на третье место, т. е. произошло событие  $\bar{A}_5$ , противоположное событию  $A_5$  и  $P(\bar{A}_5 | H_5) = 1 - P(A_5 | H_5) = 0,2$ .

Таблица 4.4

Результаты работы первого эксперта

Варианты (проекты)	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
Ранги вариантов	1	3	2	3	3	1	3
События	$A_1$	$\bar{A}_2$	$A_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$A_6$	$\bar{A}_7$

Расчет апостериорной вероятности гипотезы  $H_5^1$  производится по формуле (4.22), т. е.

$$P(H_5^1 | \bar{A}_5) = \frac{P(\bar{A}_5 | H_5) \cdot P(H_5^0)}{\sum_{i=1}^7 P(\bar{A}_5 | H_i) \cdot P(H_i^0)} \approx 0,143.$$

Верхний индекс (1) в  $P(H_5^1 | \bar{A}_5)$  указывает на результат, полученный после высказываний первого эксперта (результат первой итерации при использовании формулы Байеса).

Апостериорные вероятности для других гипотез соответственно равны:

$$P(H_7^1 | \bar{A}_5) = \frac{P(\bar{A}_5 | H_7) \cdot P(H_7^o)}{\sum_{i=1}^7 P(\bar{A}_5 | H_i) \cdot P(H_i^o)} \approx 0,286;$$

$$P(H_i^1 | \bar{A}_5) = \frac{P(\bar{A}_5 | H_i) \cdot P(H_i^o)}{\sum_{i=1}^7 P(\bar{A}_5 | H_i) \cdot P(H_i^o)} \approx 0,114, \quad i = 1, 2, 3, 4, 6.$$

Предположим, что событие  $A_7$  характеризует оптимальность варианта  $v_7$ . В этом случае имеет место  $\bar{A}_7$  (табл. 4.4) и при правдоподобиях

$$P(A_7 | H_5) = 0,8, \quad P(A_7 | H_i, i \neq 7) = 0,6$$

апостериорные вероятности равны

$$P(H_7 | \bar{A}_7) = \frac{P(\bar{A}_7 | H_7) \cdot P(H_7^o)}{\sum_{i=1}^7 P(\bar{A}_7 | H_i) \cdot P(H_i^o)} \approx 0,143;$$

$$P(H_5 | \bar{A}_7) \approx 0,286, \quad P(H_i | \bar{A}_7) \approx 0,114, \quad i = 1, 2, 3, 4, 6.$$

В целях большей достоверности результатов следует рассмотреть и другие гипотезы об оптимальности вариантов. Рассмотрим их схематично.

Событие  $A_1$  характеризует оптимальность варианта  $v_1$  и при  $P(A_1 | H_1) = 0,8, P(A_1 | H_i, i \neq 1) = 0,6$ :

$$P(H_1^1 | A_1) = \frac{P(A_1 | H_1) \cdot P(H_1^o)}{\sum_{i=1}^7 P(A_1 | H_i) \cdot P(H_i^o)} \approx 0,129;$$

$$P(H_5^1 | A_1) = P(H_7^1 | A_1) = 0,242;$$

$$P(H_2^1 | A_1) = P(H_3^1 | A_1) = P(H_4^1 | A_1) = P(H_6^1 | A_1) \approx 0,097.$$

Аналогично выполняются расчеты для событий  $A_j, j = 2, 3, 4$ , результаты вычислений представлены в таблице 4.5.

Таблица 4.5

## Вероятности гипотез по результатам работы эксперта 1

Вероятности	Гипотезы						
	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$
$P(H_i^0)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,25	0,1	0,25
$P(H_i^1   A_1)$	0,129	0,097	0,097	0,097	0,242	0,097	0,242
$P(H_i^1   \bar{A}_2)$	0,105	0,053	0,105	0,105	0,263	0,105	0,263
$P(H_i^1   A_3)$	0,097	0,097	0,129	0,097	0,242	0,097	0,242
$P(H_i^1   \bar{A}_4)$	0,105	0,105	0,105	0,053	0,263	0,105	0,263
$P(H_i^1   \bar{A}_5)$	0,114	0,114	0,114	0,114	0,143	0,114	0,286
$P(H_i^1   A_6)$	0,097	0,097	0,097	0,097	0,242	0,129	0,242
$P(H_i^1   \bar{A}_7)$	0,114	0,114	0,114	0,114	0,286	0,114	0,143
$\bar{P}_1(H_i   \mathcal{A})$	0,109	0,097	0,109	0,097	0,24	0,109	0,24

В последней строке таблицы 4.5 приведены усредненные апостериорные вероятности, рассчитанные по формуле

$$\bar{P}_1(H_i | \mathcal{A}) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 P(H_i^1 | A_i), \quad \mathcal{A} = \{A_i, i = \overline{1,7}\}.$$

Сравнение их с априорными вероятностями гипотез  $P_0(H_i)$  показывает, что средние апостериорные вероятности изменились незначительно, причем вероятности гипотез об оптимальности  $v_5$  и  $v_7$  уменьшились и возросли вероятности для вариантов  $v_1$ ,  $v_3$  и  $v_6$ . Таким образом, высказываний эксперта на первой итерации оказалось недостаточно для принятия решения.

Результаты работы эксперта 2 (на второй итерации) представлены в таблице 4.6.

Таблица 4.6

## Результаты работы второго эксперта

Варианты (проекты)	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
Ранги вариантов	3	3	4	1	1	5	2
События	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$A_4$	$A_5$	$\bar{A}_6$	$A_7$



Используя в качестве априорных вероятностей результаты предыдущего этапа и принятые правдоподобия, для события  $A_5$  (вариант  $v_5$  имеет ранг, равный 1) получаем:

$$P(H_5^2 | A_5) = \frac{P(A_5 | H_5) \cdot P(H_5^1 | \bar{A}_5)}{\sum_{i=1}^7 P(A_5 | H_i) \cdot P(H_i^1 | \bar{A}_5)} = 0,182;$$

$$P(H_7^2 | A_5) = \frac{P(A_5 | H_7) \cdot P(H_7^1 | \bar{A}_5)}{\sum_{i=1}^7 P(A_5 | H_i) \cdot P(H_i^1 | \bar{A}_5)} \approx 0,273;$$

$$P(H_i^2 | A_5) \approx 0,109, \quad i = 1, 2, 3, 4, 6.$$

Аналогично рассчитываются апостериорные вероятности для событий  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 6, 7$ . Результаты расчетов по высказываниям второго эксперта представлены в таблице 4.7. Из таблицы видно, что вероятности  $\bar{P}_2(H_i | A)$  близки к априорным, поэтому требуется привлечение еще одного эксперта.

Результаты высказываний третьего эксперта представлены в таблице 4.8. При расчете апостериорных вероятностей здесь в качестве априорных используются значения  $P_2(H_i) = P(H_i^2 | A_j)$ , взятые из таблицы 4.7.

Таблица 4.7

Вероятности гипотез по результатам работы эксперта 2

Вероятности	Гипотезы						
	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$
$P(H_i^2   \bar{A}_1)$	0,069	0,104	0,104	0,104	0,259	0,104	0,259
$P(H_i^2   \bar{A}_2)$	0,108	0,027	0,108	0,108	0,27	0,108	0,27
$P(H_i^2   \bar{A}_3)$	0,104	0,104	0,069	0,104	0,259	0,104	0,259
$P(H_i^2   A_4)$	0,103	0,103	0,103	0,069	0,258	0,103	0,258
$P(H_i^2   A_5)$	0,109	0,109	0,109	0,109	0,182	0,109	0,273
$P(H_i^2   \bar{A}_6)$	0,104	0,104	0,104	0,104	0,259	0,069	0,259
$P(H_i^2   A_7)$	0,109	0,109	0,109	0,109	0,273	0,109	0,182
$\bar{P}_2(H_i   A)$	0,101	0,094	0,101	0,101	0,251	0,101	0,251

Таблица 4.8

## Результаты работы третьего эксперта

Варианты (проекты)	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
Ранги вариантов	5	2	3	4	1	4	3
События	$\bar{A}_1$	$A_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$A_5$	$\bar{A}_6$	$\bar{A}_7$

Расчитанные значения апостериорных вероятностей и усредненные вероятности приведены в таблице 4.9.

Таблица 4.9

## Вероятности гипотез по результатам работы эксперта 3

Вероятности	Гипотезы						
	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$
$P(H_i^3   \bar{A}_1)$	0,36	0,108	0,108	0,108	0,268	0,108	0,268
$P(H_i^3   A_2)$	0,107	0,036	0,107	0,107	0,268	0,107	0,268
$P(H_i^3   \bar{A}_3)$	0,108	0,108	0,036	0,108	0,268	0,108	0,268
$P(H_i^3   \bar{A}_4)$	0,107	0,107	0,107	0,036	0,267	0,107	0,267
$P(H_i^3   A_5)$	0,103	0,103	0,103	0,103	0,229	0,103	0,257
$P(H_i^3   \bar{A}_6)$	0,108	0,108	0,108	0,108	0,268	0,036	0,268
$P(H_i^3   \bar{A}_7)$	0,12	0,12	0,12	0,12	0,3	0,12	0,1
$\bar{P}_3(H_i   A)$	0,098	0,099	0,099	0,099	0,267	0,098	0,242

Таким образом, после высказываний третьего эксперта максимальное значение средней вероятности соответствует гипотезе  $H_5$  ( $\bar{P}_3(H_5 | A) = 0,267$ ), в качестве оптимального варианта следует принять  $v_5$ .

Рассматривая в качестве  $v_a$  вариант  $v_5$  и в качестве  $v_b$  вариант  $v_6$  при  $k=3$ ,  $k_a=2$  и  $k_b=1$  на основе формулы (4.25) получаем  $m \geq 2$ , а согласно (4.23)  $P_a=2/3$ ,  $P_b=1/3$ . Для этих значений при  $m \geq (k_a - k_b) + 1$  неравенство

$$\bar{P}_{3+2}(H(v_5)A) > \bar{P}_{3+2}(H(v_7)A)$$

выполняется с вероятностью

$$P_2(a) = 1 - P_2(b) - P_2(a, b),$$

где  $P_2(a, b)$  — вероятность того, что при  $m=2$  средние апостериорные вероятности для вариантов  $v_a$  и  $v_b$  примерно сравниваются.

Задаемся  $P_m=0,05$ , т. е.  $P_2=0,61$ . Используя формулы (4.26), (4.27), получаем

$$P_2(b) = (1 - P_a)^2 P_b^2 \approx 0,012;$$

$$P_2(a, b) = 2P_a(1 - P_a)P_b^2 \approx 0,049;$$

$$P_2(a) = 1 - P_m \approx 0,94,$$

т. е. дополнительное привлечение двух экспертов с вероятностью 0,94 не изменит лидирующего положения проекта  $\cup_5$ , поэтому его можно считать оптимальным и больше экспертов не привлекать.

Следует заметить, что при обработке таблиц 4.4, 4.6 и 4.8 обычным способом коэффициент конкордации имеет очень низкое значение (0,094) и, естественно, мнения экспертов обо всех вариантах считаются несогласованными (оценка критерия хи-квадрат 1,69, а его табличное значение 12,59). Вместе с тем алгоритм, основанный на байесовском подходе, позволяет сделать достаточно надежные выводы о предпочтительном варианте, а именно:

- использование метода экспертных оценок совместно с байесовским подходом позволяет формализовать задачу определения числа привлекаемых экспертов;
- расчет средних апостериорных вероятностей дает возможность принимать обоснованные решения относительно группы предпочтительных вариантов, когда мнения экспертов относительно всего множества вариантов считаются несогласованными;
- расчет апостериорных вероятностей на каждой итерации и прогнозирование вероятностей  $P_m(b)$  позволяют исключить из рассмотрения заведомо неперспективные варианты;
- алгоритм удобен для оперативного принятия решений при работе с экспертами в режиме удаленного доступа (например, с использованием Интернета), когда ответы экспертов поступают неодновременно.

В общем случае использование формулы Байеса требует знаний априорных и условных вероятностей, для оценки которых необходимы статистические данные. При этом встречаются следующие сложности: большие

трудозатраты для получения представительной выборки, особенно в случае многомерных распределений; необходимость принятия решений в условиях редко повторяющихся ситуаций, наблюдение за которыми требует длительного времени; изменение характера распределений и взаимосвязи между данными и ситуациями со временем, особенно для экономических показателей развивающихся предприятий и др.

#### **4.2.4. Метод Шортлифа — Бьюкенена**

Существуют методы, которые в определенной степени позволяют избежать вышеперечисленные трудности. Например, стэндфордская теория фактора уверенности или метод Шортлифа — Бьюкенена позволяет делать оперативные выводы на основе неполных знаний. Для этого вместо сбора представительной выборки составляется система продукционных правил, собираются и обрабатываются мнения экспертов, которые затем интерпретируются в вероятностном смысле [3], [28], [29]. Преимущество метода Шортлифа — Бьюкенена по сравнению с системой условных вероятностей, применяемых при байесовском подходе, заключается в следующем:

- имеется возможность использования фундаментальных знаний и теоретических закономерностей;
- возможно применение опытных данных при рассмотрении объектов, имеющих разные классы проблемных ситуаций и для которых нет достаточного статистического материала;
- легкость модификации алгоритма решения задачи, так как продукционные правила жестко не связаны одно с другим и нет необходимости строить заранее структурированное дерево решений;
- изменение правил и добавление новых не требует анализа сложных взаимосвязей с другими частями системы исходных данных и промежуточных результатов;
- облегчается поиск потенциальных конфликтов и несовместимостей в базе знаний;
- используются простые механизмы объяснений вычислительного процесса.

Важную роль в методе Шортлифа — Бьюкенена играют понятия меры уверенности и меры неуверенности. Мера (measure) уверенности или доверия (believe)  $MB$  в соответствии с равенством  $MB[h, x]=\alpha$  означает, что степень или мера уверенности в некоторой гипотезе  $h$ , основанная на свидетельстве (факторе)  $x$ , есть  $\alpha$ . Гипотеза  $h$  может заключаться в предпочтительности одного из альтернативных вариантов  $\cup$  проектного решения. Мера неуверенности или недоверия (distrust)  $MD$  или  $MD[h, x]=\beta$  означает, что мера неуверенности в  $h$ , основанная на свидетельстве  $x$ , есть  $\beta$ .

Значения  $MB$ ,  $MD$ , как и для вероятности события, всегда должны находиться в интервале  $[0, 1]$ . Свидетельства не обязательно должны быть только наблюдаемыми, они могут являться и гипотезами. Например,  $MB[h_1, h_2]$  есть мера увеличения уверенности в гипотезе  $h_1$  при условии, что гипотеза  $h_2$  является истинной.

Одно и то же свидетельство  $x$  не может выступать одновременно как в пользу, так и против гипотезы  $h$ , т. е.

$$\text{если } MB[h, x] > 0, \text{ то } MD[h, x] = 0;$$

$$\text{если } MD[h, x] > 0, \text{ то } MB[h, x] = 0.$$

Если гипотеза  $h$  не зависит от свидетельства  $x$ , т. е. условная вероятность  $P(h | x)$  равна априорной вероятности  $P(h)$ , то

$$MB[h, x] = MD[h, x].$$

Определение  $MB$  и  $MD$  производится с использованием соотношений

$$MB[h, x] = \begin{cases} 1, & \text{если } p(h) = 1; \\ \frac{\max\{p(h|x), p(h)\} - p(h)}{1 - p(h)}, & \text{если } p(h) < 1; \end{cases}$$

$$MD[h, x] = \begin{cases} 1, & \text{если } p(h) = 0; \\ \frac{\min\{p(h|x), p(h)\} - p(h)}{-p(h)}, & \text{если } p(h) > 0, \end{cases}$$

где  $p(h)$  — априорная вероятность гипотезы  $h$ ,  $p(h|x)$  — условная вероятность  $h$  при свидетельстве  $x$ .

Вероятность  $p(h)$  отражает уверенность эксперта в истинности гипотезы  $h$  в любой момент времени, а  $1 - p(h)$  оценивает неуверенность эксперта в истинности  $h$ . Если  $p(h|x) > p(h)$ , то  $x$  увеличивает уверенность эксперта в гипотезе  $h$ , а в случае  $p(h|x) < p(h)$  свидетельство  $x$  уменьшает уверенность в гипотезе  $h$  (или, другими словами, увеличивает неуверенность в истинности гипотезы  $h$ ).

Для расчета  $MB$  и  $MD$  часто используют упрощенные формулы:

$$MB[h, x] = \frac{p(h|x) - p(h)}{p(h)}, \text{ если } p(h|x) > p(h); \quad (4.28)$$

$$MD[h, x] = \frac{p(h) - p(h|x)}{p(h)}, \text{ если } p(h|x) > p(h). \quad (4.29)$$

Наряду с  $MB$  и  $MD$  в методе Шортлифа — Бьюкенена используется также особый коэффициент, называемый фактором уверенности  $CF$  (*Certainty Factor*), вычисляемый по формуле

$$CF[h, x] = MB[h, x] - MD[h, x], \quad CF[h, x] \in [-1; 1], \quad (4.30)$$

причем

$$CF[h, x] + CF[\bar{h}, x] \neq 1, \quad (4.31)$$

где  $\bar{h}$  — отрицание гипотезы  $h$ .

К основным свойствам мер  $MB$  и  $MD$  относятся следующие:

1) если  $h$  — достоверная гипотеза, то

$$p(h|x) = 1, \quad MB[h, x] = 1, \quad MD[h, x] = 0, \quad CF[h, x] = 1; \quad (4.32)$$

2) если достоверно отрицание гипотезы  $h$ , т. е.  $\bar{h}$ , то

$$p(\bar{h}|x) = 1, \quad MB[h, x] = 0, \quad MD[h, x] = 1; \quad CF[h, x] = -1; \quad (4.33)$$

3) если свидетельств недостаточно, то

$$MB[h, x] = 0, \quad MD[h, x] = 0, \quad CF[h, x] = 0, \quad (4.34)$$

т. е. здесь свидетельство  $x$  не подтверждает гипотезу  $h$  и не отвергает ее.

В случае упорядоченного наблюдения двух свидетельств — сначала  $x_1$ , а затем  $x_2$ , расчет  $MB$  и  $MD$  выполняется по формулам:

$$MB[h, x_1 \wedge x_2] = \begin{cases} 0, & \text{если } MD[h, x_1 \wedge x_2] = 1; \\ MB[h, x_1] + \\ + MB[h, x_2] \times \\ \times (1 - MB[h, x_1]), & \text{если } MD[h, x_1 \wedge x_2] \neq 1; \end{cases} \quad (4.35)$$

$$MD[h, x_1 \wedge x_2] = \begin{cases} 0, & \text{если } MB[h, x_1 \wedge x_2] = 1; \\ MD[h, x_1] + \\ + MD[h, x_2] \times \\ \times (1 - MD[h, x_1]), & \text{если } MB[h, x_1 \wedge x_2] \neq 1; \end{cases} \quad (4.36)$$

$$CF[h, x] = \frac{p(h|x) - p(h)}{1 - p(h)}. \quad (4.37)$$

В случае двух гипотез  $h_1, h_2$  для расчетов можно использовать приближенные формулы:

$$MB[h_1 \wedge h_2, x] \approx \min(MB[h_1, x], MB[h_2, x]); \quad (4.38)$$

$$MD[h_1 \vee h_2, x] \approx \min(MD[h_1, x], MD[h_2, x]); \quad (4.39)$$

$$MB[h_1 \vee h_2, x] \approx \max(MB[h_1, x], MB[h_2, x]); \quad (4.40)$$

$$MD[h_1 \wedge h_2, x] \approx \max(MD[h_1, x], MD[h_2, x]). \quad (4.41)$$

Метод Шортлифа — Бьюкенена, с одной стороны, позволяет оперативно принять решение при минимуме информации, а с другой — не обеспечивает гарантии от ошибочных решений. Основными источниками ошибок являются субъективность назначения исходных условных вероятностей  $p(v_j | x_i)$  и формулировки продукционных правил.

Рассмотрим применение метода Шортлифа — Бьюкенена на следующем примере. Пусть сравниваются два варианта инвестирования проектов:  $v_1$  — модернизация выпускаемого изделия,  $v_2$  — разработка нового устройства.

Для принятия решения учитываются следующие основные факторы (свидетельства):  $x_1$  — ожидаемое повышение показателей безотказности,  $x_2$  — ожидаемое увеличение срока службы,  $x_3$  — требуемый объем финансовых вложений,  $x_4$  — требуемый объем трудозатрат,  $x_5$  — ожидаемое снижение материало- и энергоемкости,  $x_6$  — ожидаемые сроки завершения работ.

Формулируются следующие производственные правила.

- П1: «ЕСЛИ вариант  $v_j$  обеспечивают факторы  $x_1$  и  $x_2$ , ТО проект  $v_j$  будет принят».
- П2: «ЕСЛИ в варианте  $v_j$  выполняются условия для факторов  $x_3$  или  $x_4$ , ТО проект  $v_j$  будет принят».
- П3: «ЕСЛИ вариант  $v_j$  обеспечивают факторы  $x_5$  и  $x_6$ , ТО проект  $v_j$  будет принят».

Усредненные доли уверенности  $\tilde{p}(v_j | x_i)$  принятия варианта  $v_j$  на основании данных  $x_i$ , полученных от экспертов, и результаты расчета  $MB[v_j, x_i]$ ,  $MD[v_j, x_i]$ ,  $CF[v_j, x_i]$  для априорной вероятности  $p(v_j) = 0,5$  с использованием соотношений (4.28)–(4.31) представлены в таблице 4.10.

Таблица 4.10

## Сопоставление вариантов на основании факторов

Факторы $x_i$	Вариант $v_1$			
	$\tilde{p}(v_1   x_i)$	$MB[v_1, x_i]$	$MD[v_1, x_i]$	$CF[v_1, x_i]$
$x_1$	0,3	0	0,4	-0,4
$x_2$	0,4	0	0,2	-0,2
$x_3$	0,6	0,2	0	0,2
$x_4$	0,6	0,2	0	0,2
$x_5$	0,4	0	0,2	-0,2
$x_6$	0,6	0,2	0	0,2
Факторы $x_i$	Вариант $v_2$			
	$\tilde{p}(v_2   x_i)$	$MB[v_2, x_i]$	$MD[v_2, x_i]$	$CF[v_2, x_i]$
$x_1$	0,8	0,6	0	0,6
$x_2$	0,9	0,8	0	0,8
$x_3$	0,5	0	0	0
$x_4$	0,6	0,2	0	0,2
$x_5$	0,6	0,2	0	0,2
$x_6$	0,6	0,2	0	0,2



В таблице 4.11 приведены результаты расчета показателей  $MB$ ,  $MD$  и  $CF$  для сложных гипотез, соответствующих сформулированным правилам с использованием соотношений (4.28)–(4.41).

Таблица 4.11

**Сопоставление вариантов по сложным гипотезам**

Продукционное правило	Вариант $v_1$			Вариант $v_2$		
	$MB$	$MD$	$CF$	$MB$	$MD$	$CF$
П1 ( $x_1 \wedge x_2 \sim y_1$ )	0	0,4	-0,4	0,6	0	0,6
П2 ( $x_3 \vee x_4 \sim y_2$ )	0,2	0	0,2	0,2	0	0,2
П3 ( $x_5 \wedge x_6 \sim y_3$ )	0	0,2	-0,2	0,2	0	0,2

Последовательная интеграция значений  $MB$  и  $MD$  по всем трем продукционным правилам выполняется по формулам:

$$MB[v_j; y_1, y_2] = MB[v_j; y_1] + MB[v_j; y_2](1 - MB[v_j; y_1]);$$

$$MD[v_j; y_1, y_2] = MD[v_j; y_1] + MD[v_j; y_2](1 - MD[v_j; y_1]);$$

$$\begin{aligned} MB[v_j; y_1, y_2, y_3] &= \\ &= MB[v_j; y_1, y_2] + MB[v_j; y_3](1 - MB[v_j; y_1, y_2]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MD[v_j; y_1, y_2, y_3] &= \\ &= MD[v_j; y_1, y_2] + MD[v_j; y_3](1 - MD[v_j; y_1, y_2]). \end{aligned}$$

Итоговые результаты вычислений представлены в таблице 4.12.

Таблица 4.12

**Окончательные результаты сравнения вариантов**

Сложные гипотезы	Вариант $v_1$			Вариант $v_2$		
	$MB$	$MD$	$CF$	$MB$	$MD$	$CF$
$[v_j; y_1, y_2]$	0,2	0,4	-0,2	0,76	0	0,76
$[v_j; y_1, y_2, y_3]$	0,2	0,52	-0,32	0,808	0	0,808

Таким образом, при использовании значений  $\tilde{p}(v_j | x_i)$  предпочтительнее вариант решения  $v_2 = \tilde{v}^*$ , так как

$$MB[v_2; y_1, y_2, y_3] = 0,808 > MB[v_1; y_1, y_2, y_3] = 0,2;$$

$$CF[v_2; y_1, y_2, y_3] = 0,808 > CF[v_1; y_1, y_2, y_3] = -0,32.$$

Вероятности  $p(v_j | x_i)$  определяются на основе высказываний экспертов, поэтому в общем случае в результате экспертизы имеет место массив вероятностей

$$P(v_j | x_i) = (p_1(v_j | x_i), p_2(v_j | x_i), \dots, p_l(v_j | x_i)),$$

в котором  $p_v(v_j | x_i)$  — доля уверенности принятия варианта  $v_j$  на основании данных  $x_i$  у эксперта  $v$ ;  $l$  — число экспертов.

Массив вероятностей  $P(v_j | x_i)$  характеризуется размахом

$$R(v_j | x_i) = P_{\max}(v_j | x_i) - P_{\min}(v_j | x_i),$$

где  $P_{\max(\min)}(v_j | x_i)$  — максимальное (минимальное) значение доли уверенности в группе экспертов. В зависимости от величины  $R(v_j | x_i)$  можно выделить два случая — плотный и разреженный массивы.

Массив  $P(v_j | x_i)$  считается плотным, если  $R(v_j | x_i)$  не превышает допустимое значение  $r_{\text{доп}}$ , и разреженным (неплотным), если  $R(v_j | x_i) > r_{\text{доп}}$ .

Неплотный массив  $P_{\text{нп}}(v_j | x_i)$  называется равномерным, если наибольшая разность между проранжированными (соседними) значениями  $p_v^p(v_j | x_i)$  не превышает  $r'_{\text{доп}} \approx r_{\text{доп}}$ , и неравномерным, если эта разность больше, чем  $r'_{\text{доп}}$ .

В качестве центра массива  $P(v_j | x_i)$  при малом  $l$  целесообразно использовать медианное значение  $\tilde{p}(v_j | x_i)$ . Предпочтительный вариант решения, полученный при использовании  $\tilde{p}(v_j | x_i)$  по алгоритмам метода Шортлифа — Бьюкенена, обозначим  $\tilde{v}^*$ .

Вариант решения  $\tilde{v}^*$  называется абсолютно надежным относительно исходных массивов  $\{P(v_j | x_i), j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}\}$ , если он сохраняется для всех возможных комбинаций  $p_v(v_j | x_i), j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}, v = \overline{1, l}$ . Это число комбинаций имеет порядок  $l^{m \times n}$ , при котором проводить вычисления практически невозможно. Для сокращения вычислений можно воспользоваться следующим положением.

Если массивы  $P(v_j | x_i)$  заменить интервальными значениями  $[p_{\text{н}}(v_j | x_i), p_{\text{в}}(v_j | x_i)]$  и вариант  $\tilde{v}^*$  сохраняется для всех возможных комбинаций границ интервалов, то такой вариант  $\tilde{v}^*$  абсолютно надежен. Число возможных комбинаций в данном случае сокращается до  $2^{m \times n}$ .

Для варианта  $\tilde{v}^* = v_\mu$  всегда можно выделить вектор граничных значений  $(p_{\text{гр}}(v_j | x_i), i = \overline{1, n})$ , который соответствует минимальной интегральной мере уверенности, а для альтернативных вариантов  $v_j \neq \tilde{v}_\mu^*$  можно выделить векторы  $(p_{\text{гр}}(v_j | x_i), i = \overline{1, n})$ ,  $j \in \{1, \dots, m \setminus \mu\}$ , которые соответствуют максимальным интегральным мерам уверенности. Если вариант  $\tilde{v}^* = v_\mu$  для выделенных векторов сохраняется как предпочтительный, то он характеризуется как абсолютно надежный.

Если требования абсолютной надежности не выполняются, то величина показателя надежности  $\mathcal{N}$  оценивается с помощью вычислительных экспериментов следующим образом. Последовательно для всех  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  с использованием  $p_{\text{гр}}(v_j | x_i)$  и  $p_{\text{гр}}(v_j \neq x_i)$  рассчитываются интегрированные значения мер  $MB P_{\text{гр}}^i$  и  $MD P_{\text{гр}}^i$ . По результатам расчетов определяется число  $n(\tilde{v}^*)$ , при котором вариант  $\tilde{v}^*$  сохраняется предпочтительным, и показатель надежности составляет значение  $\mathcal{N}_1 = \frac{n(\tilde{v}^*)}{n}$ .

В случае необходимости (например,  $\mathcal{N}_1 = 1$  и требуется продолжить анализ) проводятся вычислительные эксперименты для всех пар свидетельств  $x_i, x_k$  и подсчитывается показатель  $\mathcal{N}_2 = \frac{n_2(\tilde{v}^*)}{n_2}$ , где  $n_2$  равно числу сочетаний из  $n$

по 2. Аналогично могут подсчитываться  $\mathcal{N}_3$  и т. д.

В качестве примера исследуем надежность полученного решения на основе интервальных значений  $[p_n, p_v]$  из таблицы 4.13.

Для расчета  $\tilde{p}(v_j | x_i)$  используем значения  $p_{\text{гр}}(v_1 | x_i)$  и  $p_{\text{гр}}(v_2 | x_i)$ , результаты вычислений приведены в таблицах 4.14–4.16.

Так как  $MB[v_2; y_1, y_2, y_3] > MB[v_1; y_1, y_2, y_3]$ , т. е. мера уверенности второго варианта ( $v_2$ ) превышает меру уверенности первого ( $v_1$ ) даже при использовании граничных, наиболее благоприятных значений условных вероятностей свидетельств, то вариант  $v_2$  является предпочтительным с коэффициентом надежности  $\mathcal{N} = 1$ , учитывающим высказывания всех экспертов.

Таблица 4.13

## Массивы условных вероятностей и интервалы их значений

Свидетельство $x_i$	Вариант решения $v_1$				
	$p_1(v_1   x_i)$	$p_2(v_1   x_i)$	$p_3(v_1   x_i)$	$\bar{p}(v_1   x_i)$	$[p_n, p_n]$
$x_1$	0,3	0,5	0,2	0,3	[0,2; 0,5]
$x_2$	0,5	0,4	0,3	0,3	[0,3; 0,5]
$x_3$	0,6	0,7	0,4	0,6	[0,4; 0,7]
$x_4$	0,6	0,7	0,6	0,6	[0,6; 0,7]
$x_5$	0,4	0,6	0,3	0,4	[0,3; 0,6]
$x_6$	0,4	0,6	0,7	0,6	[0,4; 0,7]
Свидетельство $x_i$	Вариант решения $v_2$				
	$p_1(v_2   x_i)$	$p_2(v_2   x_i)$	$p_3(v_2   x_i)$	$\bar{p}(v_2   x_i)$	$[p_n, p_n]$
$x_1$	0,85	0,8	0,8	0,8	[0,8; 0,85]
$x_2$	0,9	0,8	0,9	0,9	[0,8; 0,9]
$x_3$	0,4	0,5	0,5	0,5	[0,4; 0,5]
$x_4$	0,6	0,6	0,55	0,6	[0,55; 0,6]
$x_5$	0,6	0,7	0,6	0,6	[0,6; 0,7]
$x_6$	0,5	0,6	0,6	0,5	[0,5; 0,6]

Таблица 4.14

## Сопоставление вариантов по отдельным факторам

Свидетельство $x_i$	Вариант решения $v_1$				Вариант решения $v_2$			
	$p_{гр}(v_1   x_i)$	$MB$	$MD$	$CF$	$p_{гр}(v_2   x_i)$	$MB$	$MD$	$CF$
$x_1$	0,5	0	0	0	0,8	0,6	0	0,6
$x_2$	0,5	0	0	0	0,8	0,6	0	0,6
$x_3$	0,7	0,4	0	0,4	0,4	0	0,2	-0,2
$x_4$	0,7	0,4	0	0,4	0,55	0,1	0	0,1
$x_5$	0,6	0,2	0	0,2	0,6	0,2	0	0,2
$x_6$	0,7	0,4	0	0,4	0,5	0	0	0

Таблица 4.15

## Сопоставление вариантов по сложным гипотезам

Продукционное правило	Вариант $v_1$			Вариант $v_2$		
	$MB$	$MD$	$CF$	$MB$	$MD$	$CF$
П1 ( $x_1 \wedge x_2 \sim y_1$ )	0	0	0	0,6	0	0,6
П2 ( $x_3 \vee x_4 \sim y_2$ )	0,4	0	0,4	0,1	0	0,1
П3 ( $x_5 \wedge x_6 \sim y_3$ )	0,2	0	0,2	0	0	0

Таблица 4.16

## Окончательные результаты сравнения вариантов

Сложные гипотезы	Вариант $v_1$			Вариант $v_2$		
	<i>MB</i>	<i>MD</i>	<i>CF</i>	<i>MB</i>	<i>MD</i>	<i>CF</i>
$[v_j; y_1, y_2]$	0,4	0	0,4	0,64	0	0,64
$[v_j; y_1, y_2, y_3]$	0,52	0	0,52	0,64	0	0,64

Следовательно, методика повышения надежности принимаемых управленческих решений с использованием метода Шортлифа — Бьюкенена заключается в следующем.

1. По результатам высказываний экспертов определяются медианные значения условных вероятностей и интервальные значения  $[p_n(v_j | x_i), p_v(v_j | x_i)]$ .

2. По значениям  $\tilde{p}(v_j | x_i)$  рассчитывается условно-оптимальный вариант решения  $\tilde{v}^*$ .

3. Полученный вариант  $\tilde{v}^*$  оценивается на надежность (отказоустойчивость). Для этого в расчете вместо  $\tilde{p}(v_j | x_i)$  используются такие граничные значения, которые являются неблагоприятными для  $\tilde{v}^*$  и благоприятными для альтернативных вариантов. Если при этом вариант  $\tilde{v}^*$  сохраняется как оптимальный, то принимаемое решение считается абсолютно надежным. В противном случае рассчитываются показатели надежности  $N_1, N_2$  и т. д., на основании которых и принимается окончательное решение.

#### 4.2.5. Метод Демпстера — Шафера

Для учета дополнительно используемой информации при выработке решений широкое применение находит также метод Демпстера — Шафера [3], [28], [29], который можно рассматривать как развитие байесовского подхода по уточнению апостериорных вероятностей по мере накопления данных на случай, когда неизвестны законы распределения вероятностей исследуемых переменных и параметров. При байесовском подходе требуется знание точных значений вероятностей, метод же Демпстера — Шафера основан на равной вероятности событий. Иначе говоря, как в случае полного незнания, так и в случае равных вероятностей, событиям  $A_i$  приписываются одни и те же значения  $p(A_i)$ . Кроме того, для гипотезы (события)  $A$  всегда выполняется условие  $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ . Использо-

мые в методе Демпстера — Шафера аксиомы слабее аксиом теории вероятностей, однако получаемые результаты обработки данных совпадают, если все вероятности, т. е. понимаемые в этом смысле показатели, точно известны. Во многих случаях свидетельства, частично подтверждающие гипотезу, необязательно подтверждают ее отрицание.

В основе метода Демпстера — Шафера лежат два положения: возможность получения меры доверия для решаемой задачи из субъективных свидетельств о связанных с ней проблемах и правило объединения свидетельств (формула Демпстера).

Пусть подмножество гипотез  $A$  поддерживается первой группой свидетельств, соответствующую меру доверия обозначим  $m_1(A)$ . Подмножество гипотез  $B$  поддерживается второй группой свидетельств с мерой доверия  $m_2(B)$ . В предположении, что  $m_1(A)$  и  $m_2(B)$  получены на основе независимых высказываний, новую меру доверия, объединяющую свидетельства подмножеств гипотез  $A$  и  $B$ , определим по формуле Демпстера

$$m_3(C) = K \sum_{A \cap B = C} m_1(A) \cdot m_2(B), \quad (4.42)$$

где  $C$  — подмножество гипотез, которое поддерживается как первой, так и второй группой свидетельств;  $K$  — коэффициент нормализации, обеспечивающий выполнение условия, чтобы сумма мер доверия элементов множества  $C$  равнялась 1:

$$K = \left( 1 - \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A) \cdot m_2(B) \right)^{-1}. \quad (4.43)$$

В общем случае на  $n$ -м шаге объединения источников свидетельств формула Демпстера записывается в виде

$$m_n(Z) = \frac{\sum_{X \cap Y = Z} m_{n-2}(X) \cdot m_{n-1}(Y)}{1 - \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_{n-2}(X) \cdot m_{n-1}(Y)}. \quad (4.44)$$

При объединении свидетельств  $m_{n-2}(X)$  и  $m_{n-1}(Y)$  для получения  $m_n(Z)$  в результате пересечения двух пар множеств ( $X$  и  $Y$ ) могут получаться пустые множества  $m_n(\emptyset)$ .

Большое значение  $m_n(\emptyset)$  означает существование конфликта свидетельств на множестве мер доверия.

Поясним применение формулы (4.44) на следующем примере. Пусть высказывание эксперта или группы экспертов относительно предпочтительности вариантов  $\mathcal{V}=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  рассматривается как первая часть свидетельств. При этом выдвинуты гипотезы о перспективности вариантов  $v_2$  и  $v_3$ , т. е.  $A=(v_2, v_3, \theta_a)$ . Здесь  $\theta_a$  — множество гипотез, представляющее собой полную группу взаимоисключающих событий. На основании первой части свидетельств получены меры  $m_1(v_2)=0,4$ ;  $m_1(v_3)=0,3$  и  $m_1(\theta_a)=0,3$ . На основании новой группы свидетельств имеют место гипотезы  $B=\{v_1, v_2, \theta_b\}$  с мерами доверия  $m_2(v_1)=0,3$ ;  $m_2(v_2)=0,3$  и  $m_2(\theta_b)=0,4$ . Для двух независимых источников свидетельств формируется подмножество  $C=\{v_1, v_2, v_3, \theta_c\}$ . Объединение свидетельств без учета нормализации приведено в таблице 4.17.

Таблица 4.17

Объединение свидетельств без учета нормализации

$m_1$	$m_2$	$m_3$
$m_1(v_2)=0,4$	$m_2(v_2)=0,3$	$m_3(\emptyset)=0,12$
$m_1(v_3)=0,3$	$m_2(v_1)=0,3$	$m_3(\emptyset)=0,09$
$m_1(\theta_a)=0,3$	$m_2(v_1)=0,3$	$m_3(v_1)=0,09$
$m_1(v_2)=0,4$	$m_2(v_2)=0,3$	$m_3(v_2)=0,12$
$m_1(v_3)=0,3$	$m_2(v_2)=0,3$	$m_3(\emptyset)=0,09$
$m_1(\theta_a)=0,3$	$m_2(v_2)=0,3$	$m_3(v_2)=0,09$
$m_1(\theta_a)=0,3$	$m_2(\theta_b)=0,4$	$m_3(v_2)=0,16$
$m_1(v_3)=0,3$	$m_2(\theta_b)=0,4$	$m_3(v_3)=0,12$
$m_1(\theta_a)=0,3$	$m_2(\theta_b)=0,4$	$m_3(\theta_c)=0,12$

Используя формулу (4.43), определяем коэффициент нормализации, т. е.

$$K=(1-m_3(\emptyset))^{-1}=1,4286.$$

Далее по формуле (4.42) определяются меры доверия в результате объединения двух свидетельств:

$$m_3(v_1)=K \cdot 0,09=0,1286; m_3(v_2)=$$

$$=K \cdot (0,12+0,09+0,16)=0,5286;$$

$$m_3(v_3)=K \cdot 0,12=0,1714; m_3(\theta_c)=K \cdot 0,12=0,1714.$$

Таким образом, после объединения двух групп свидетельств мера доверия к варианту  $\nu_2$  существенно возросла, а к другим гипотезам уменьшилась, при этом

$$m_3(\nu_1) + m_3(\nu_2) + m_3(\nu_3) + m_3(\theta_c) = m_3(C) = 1.$$

Серьезным недостатком метода Демпстера — Шафера является то, что правило объединения функций доверия (правило Демпстера) получено в предположении одинаковой достоверности разных источников свидетельств. В действительности информация, получаемая из разных источников, имеет разную степень достоверности. Это важное обстоятельство в формуле Демпстера не учитывается и может привести к неправильным решениям. Для устранения данного недостатка в формулу (4.44) вводится коэффициент  $c_{n-1}$  относительной достоверности информации, получаемой из последнего источника, т. е. для подмножества  $Y$ . Коэффициент  $c_{n-1} < 1$ , если достоверность гипотез  $Y = (y_1, \dots, y_m, \theta_y)$  меньше достоверности  $X = (x_1, \dots, x_k, \theta_x)$ , и  $c_{n-1} > 1$  в противном случае. Модифицированная формула Демпстера имеет следующий вид:

$$m_n(Z | c_{n-1}) = \frac{\sum_{X \cap Y = Z} m_{n-2}(X) \cdot m_{n-1}(Y | c_{n-1})}{1 - \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_{n-2}(X) \cdot m_{n-1}(Y | c_{n-1})}, \quad (4.45)$$

где  $m_{n-1}(Y | c_{n-1})$  — мера доверия  $m_{n-1}(Y)$  с учетом коэффициента достоверности  $c_{n-1}$ .

Для пересчета значений  $m_{n-1}(Y)$  в  $m_{n-1}(Y | c_{n-1})$  используются приведенные ниже следующие формулы.

В случае  $c_{n-1} < 1$ :

$$m_{n-1}(y_i | c_{n-1}) = \frac{d m_{n-1}(y_i)}{d \sum_{i=1}^m m_{n-1}(y_i) + m_{n-1}(\theta_y)}, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.46)$$

$$m_{n-1}(\theta_y | c_{n-1}) = \frac{m_{n-1}(\theta_y)}{d \sum_{i=1}^m m_{n-1}(y_i) + m_{n-1}(\theta_y)}; \quad (4.47)$$



$$d = \frac{c_{n-1} m_{n-1}(\theta_y)}{1 - c_{n-1} \sum_{i=1}^m m_{n-1}(y_i)}. \quad (4.48)$$

В случае  $c_{n-1} > 1$ :

$$m_{n-1}(y_i | c_{n-1}) = \frac{m_{n-1}(y_i)}{\sum_{i=1}^m m_{n-1}(y_i) + d_1 m_{n-1}(\theta_y)}, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.49)$$

$$m_{n-1}(\theta_y | c_{n-1}) = \frac{d m_{n-1}(\theta_y)}{\sum_{i=1}^m m_{n-1}(y_i) + d_1 m_{n-1}(\theta_y)}; \quad (4.50)$$

$$d_1 = \frac{c_{n-1}^{-1} \sum_{i=1}^m m_{n-1}(y_i)}{1 - c_{n-1}^{-1} m_{n-1}(\theta_y)}. \quad (4.51)$$

Рассчитанные по формулам (4.46)–(4.51) значения  $m_{n-1}(y_i | c_{n-1})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $m_{n-1}(\theta_y | c_{n-1})$  удовлетворяют условиям нормировки.

Методика применения модифицированной формулы Демпстера состоит в следующем. Для поступающих новых свидетельств с мерами доверия  $m_{n-1}(y_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , определяется коэффициент достоверности  $c_{n-1}$  по отношению к ранее используемым  $m_{n-2}(X)$ . Этот коэффициент может оцениваться методом экспертных оценок или путем сравнения точностных характеристик  $X$  и  $Y$ . Значения  $m_{n-1}(y_i)$  по формулам (4.46)–(4.48) или (4.49)–(4.51) пересчитываются в меры доверия  $m_{n-1}(y_i | c_{n-1})$ , которые затем подставляются в формулу (4.45) для расчета  $m_n(Z | c_{n-1})$ .

#### 4.2.6. Методы нечеткой логики

Ряд задач системотехнического проектирования, связанных с построением моделей, оптимизацией в условиях неопределенности, идентификацией проблемных ситуаций и др., достаточно успешно решается в автоматизированном режиме с использованием методов теории нечетких множеств [3], [30].

Под нечетким множеством (*fuzzy set*) обычно понимается совокупность элементов произвольной природы, относительно которых нельзя с полной определенностью утверждать, принадлежит ли тот или иной элемент данному множеству или нет. Например,  $\mathcal{X}$  — совокупность всех проектов,  $x$  — конкретный проект, связанный с модернизацией передающего устройства радиостанции. Нечеткое множество  $A$  — множество сложных проектов.

Математически нечеткое множество определяется как множество упорядоченных пар вида  $\langle x, \mu_A(x) \rangle$ , где  $x$  является элементом универсума (универсального множества)  $\mathcal{X}$ ,  $\mu_A(x)$  — функция принадлежности элемента  $x$  к множеству  $A$ , которая ставит в соответствие каждому из элементов  $x \in \mathcal{X}$  некоторое действительное число из интервала  $[0, 1]$ . Таким образом, функция принадлежности (*membership function*) определяет степень или уверенность, с которой элементы некоторого множества принадлежат заданному нечеткому множеству. Задать конкретное нечеткое множество означает определить соответствующую ему функцию принадлежности  $\mu_A(x)$ , которая может иметь различную форму, как видно из рисунка 4.2. Часто  $\mu_A(x)$  представляют кусочно-линейными зависимостями, примеры которых представлены на рисунке 4.2б–д. Кусочно-линейные зависимости удобно записывать математически, с ними легко производить логические операции. Например, функция принадлежности трапецеидальной формы (рис. 4.2в) аналитически задается в виде:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\text{н}}; \\ \frac{x - x_{\text{н}}}{d_1 - x_{\text{н}}}; & x \in (x_{\text{н}}, d_1); \\ 1, & x \in [d_1, d_2]; \\ \frac{x_{\text{в}} - x}{x_2 - d_2}; & x \in (d_2, x_{\text{в}}); \\ 0, & x \geq x_{\text{в}}. \end{cases}$$

Функция принадлежности треугольной формы (рис. 4.2д) может задаваться тройкой чисел  $(\bar{x}, \Delta x_{\text{н}}, \Delta x_{\text{в}})$ , поэтому иногда нечеткие множества с такими функциями принадлежности называют нечеткими числами. Область

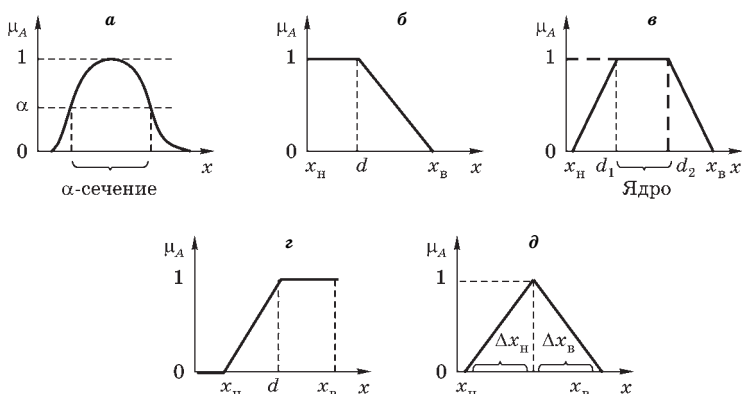


Рис. 4.2

Формы функций принадлежности:

а — колоколообразная; б-в — трапециевидальные; д — треугольная.

значений нечеткого множества, при которых функция принадлежности равна 1, называется его ядром, например интервал  $[d_1, d_2]$  на рисунке 4.2в. Значения  $x$ , при которых функция принадлежности больше некоторого задаваемого  $\alpha$ -уровня ( $\alpha \in (0; 1)$ ), называются  $\alpha$ -сечением (рис. 4.2а).

Лингвистическая переменная (*linguistic variable*) задается на количественной шкале и принимает свои значения из множества лингвистических термов, в качестве которых рассматриваются нечеткие множества. Математически лингвистическая переменная записывается в форме тройки

$$\langle a, T_a, x \rangle,$$

где  $a$  — название лингвистической переменной;  $T_a$  — множество лингвистических значений (термов, нечетких множеств) лингвистической переменной;  $x$  — область определения (количественная шкала) значений нечетких множеств, входящих в  $T_a$ . Например, в качестве лингвистической переменной рассматриваются проекты, сложность которых оценивается баллами с  $x = [0; 10]$ . Запись такой лингвистической переменной в форме тройки имеет следующий вид:

$$\langle \text{«проект»}, \{ \text{«простой»}, \\ \text{«средней сложности»}, \text{«сложный»} \}, [0; 10] \rangle.$$

С нечеткими множествами выполняются все операции, которые применяются для обычных множеств (см. § 2.2). В результате логических операций получают новые нечеткие множества с соответствующими функциями принадлежности. Наиболее часто применяются следующие логические операции:

- произведение (пересечение) нечетких множеств  $A$  и  $B$ :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathcal{X};$$

- сумма (объединение) НМ нечетких множеств  $A$  и  $B$ :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathcal{X};$$

- дополнение (отрицание) нечеткого множества  $A$ :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in \mathcal{X};$$

- вложение (принадлежность) нечетких множеств  $A$  и  $B$ :

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

На рисунке 4.3 приведены графические преобразования функций принадлежности при логических операциях с нечеткими множествами.

Задача принятия проектных решений с использованием нечеткой логики обычно формулируется следующим образом. Задаются входные  $X_1, X_2, \dots$  и выходные  $Y_1, Y_2, \dots$  лингвистические переменные в виде математических вы-

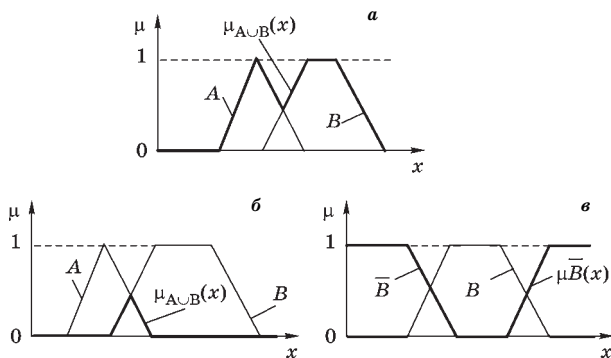


Рис. 4.3

Графические преобразования функций принадлежности:

$a - \mu_{A \cup B}(x)$ ;  $b - \mu_{A \cap B}(x)$ ;  $c - \mu_{\bar{B}}(x)$ .

ражений соответствующих функций принадлежности. В качестве входных лингвистических переменных могут рассматриваться требуемые материальные затраты на проект, сроки выполнения проекта, необходимые кадровые ресурсы, сложность предстоящих работ и т. п. Выходными лингвистическими переменными могут выступать важность проекта для организации, риск своевременного выполнения и достижения ожидаемых результатов и т. д. Составляется система продукционных правил (правил нечетких продукций)  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , записываемых в виде:

$\Pi_i$ : ЕСЛИ «подусловия», ТО «подзаклучения».

Например:

$\Pi_i$ : ЕСЛИ «затраты на проект очень большие» И «сроки выполнения проекта относятся к категории жестких»,  
ТО «риск своевременного выполнения проекта высокий».

Затем собираются или задаются необходимые исходные числовые данные, например затраты на проект 150 млн руб., срок выполнения работ 7 месяцев.

Решение задачи включает пять этапов.

1. *Фаззификация*, т. е. введение нечеткости входных лингвистических переменных. На данном этапе по заданным числовым значениям всех входных  $x^1, x^2, \dots$  лингвистических переменных и функциям принадлежности соответствующих нечетких множеств определяются их степени истинности, т.е. соответствующие значения функций принадлежности.

Например, для входной лингвистической переменной  $X_1$  «затраты» с термами (нечеткими множествами)  $X_{нз}^1$  — «незначительные»,  $X_{ум}^1$  — «умеренные»,  $X_{зн}^1$  — «значительные»,  $X_{об}^1$  — «очень большие» и функциями принадлежности  $\mu_{нз}(x)$ ,  $\mu_{ум}(x)$ ,  $\mu_{зн}(x)$ ,  $\mu_{об}(x)$  задается  $x^1 = 15$ , этому значению соответствуют следующие степени истинности  $s_v^1$ ,  $v \in \{нз, ум, зн, об\}$ :

$$\mu_{нз}(x^1 = 15) = s_{нз}^1; \quad \mu_{ум}(x^1 = 15) = s_{ум}^1;$$

$$\mu_{зн}(x^1 = 15) = s_{зн}^1; \quad \mu_{об}(x^1 = 15) = s_{об}^1.$$

В результате фаззификации определяются все значения степеней истинности  $s_v^i$  для каждого из подусловий системы продукционных правил нечеткого вывода.

2. *Агрегирование* заключается в использовании полученных значений  $s_v^i$  для определения степеней истинности условий по каждому продукционному правилу системы нечеткого вывода.

Если в правиле  $\Pi_k$  для подусловий со степенями истинности  $s_v^i$  и  $s_v^j$  содержится нечеткая конъюнкция (нечеткое «И»), то степень истинности правила  $S_x(\Pi_k)$  определяется по формуле

$$S_x(\Pi_k) = \min\{s_v^i, s_v^j\}.$$

В случае, когда подусловия объединены нечеткой дизъюнкцией (нечетким «ИЛИ»), обычно используется соотношение

$$S_x(\Pi_k) = s_v^i + s_v^j - s_v^i s_v^j.$$

Следует заметить, что для определения нечетких «И» и «ИЛИ» могут использоваться также другие формулы [30].

В результате выполнения данного этапа находится множество значений степеней истинности

$$S_x = \{S_x(\Pi_1), \dots, S_x(\Pi_n)\},$$

где  $n$  — число продукционных правил.

3. *Активизация* представляет собой процедуру нахождения степеней истинности подзаклучений в правилах нечетких продукций на основе полученного множества значений  $S_x$  и весовых коэффициентов  $F_i$ ,  $i = 1, n$  для правил (а иногда и для подзаклучений). В случае, если заключение имеет вид высказывания об одной выходной лингвистической переменной  $Y$  (например, когда продукционные правила  $\Pi_i$  записаны в виде: **ЕСЛИ** «условие», **ТО** «риск проекта высокий»), то степень истинности заключения определяется по формуле

$$S_y(\Pi_i) = F_i S_x(\Pi_i).$$

Если заключение содержит два подзаключения (в случае, когда продукционные правила имеют вид  $\Pi_i$ : **ЕСЛИ** «условие», **ТО** «риск проекта малый» **И (ИЛИ)** «конкурентоспособность изделий ожидается большая»), то степени истинности рассчитываются для каждого подзаключения, т. е.

$$S_1^{(1)}(\Pi_i) = F_i S_x(\Pi_i), \quad S_1^{(2)}(\Pi_i) = F_i S_x(\Pi_i),$$

где  $S_1^{(j)}(\Pi_i)$ ,  $j=1, 2$  — степень истинности  $j$ -го подзаключения.

В последнем случае множество степени истинности подзаключений  $S_y$  содержит  $2n$  элементов, т. е.

$$S_y = \{S_y^{(1)}(\Pi_1), S_y^{(2)}(\Pi_1), S_y^{(2)}(\Pi_2), \dots, S_y^{(2)}(\Pi_n)\}.$$

Для сокращения записи обозначим элементы множества  $S_y$  через  $c_i$ . Следовательно,

$$S_y = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}, \quad q = 2n.$$

С использованием полученных степеней истинности определяются функции принадлежности подзаключений методом нечеткой композиции. При этом могут применяться формулы:

- *min*-активизации

$$\mu'(y) = \min\{c_i; \mu(y)\};$$

- *prod*-активизации

$$\mu'(y) = c_i \mu(y);$$

- *average*-активизации

$$\mu'(y) = 0,5 \cdot (c_i + \mu(y)).$$

Кроме приведенных формул для выполнения активизации могут использоваться и другие, основанные на модификациях разных операций нечеткой композиции.

4. *Аккумуляция* заключается в определении функций принадлежности для выходных лингвистических переменных на основе объединения степеней истинности подза-

ключений, относящихся к одной и той же выходной лингвистической переменной и принадлежащих различным правилам  $\Pi_i$ . Для этого последовательно рассматриваются выходные лингвистические переменные и выделяются относящиеся к ним нечеткие множества. Затем производится объединение выделенных нечетких множеств с учетом частоты (плотности) их повторения. На данном этапе обычно используется метод *max*-объединения. Например, пусть выходная лингвистическая переменная  $Y_p$  означает «риск выполнения проекта», а ее термы — малый  $Y_m$  и большой  $Y_b$  риски. В результате активизации для этих нечетких множеств получены функции принадлежности  $\mu^p(y'_m)$  и  $\mu^p(y'_b)$ . Тогда в результате аккумуляции получают функцию принадлежности  $\mu_a^p(y)$  по одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} \mu_a^p(y) &= \mu_a^p(y'_m) + \mu^p(y'_b) - \mu_a^p(y'_m)\mu^p(y'_b); \\ \mu_a^p(y) &= \min\{\mu^p(y'_m) + \mu^p(y'_b); 1\}; \\ \mu_a^p(y) &= \begin{cases} \mu^p(y'_m), & \text{если } \mu^p(y'_b) = 0; \\ \mu^p(y'_b), & \text{если } \mu^p(y'_m) = 0; \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\ \mu_a^p(y) &= \lambda\mu^p(y'_m) + (1-\lambda)\mu^p(y'_b), \quad \lambda \in [0; 1]. \end{aligned}$$

5. *Дефаззификация* представляет собой процесс определения количественных значений  $\bar{y}_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  для всех выходных лингвистических переменных  $Y_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , полученных в результате аккумуляции. Для расчета значений  $\bar{y}_i$  обычно используется так называемый метод «центра тяжести», согласно которому

$$\bar{y}_i = \frac{\int_{y_{i\min}}^{y_{i\max}} y_i \mu_a^i(y) dy}{\int_{y_{i\min}}^{y_{i\max}} \mu_a^i(y) dy}, \quad i = \overline{1, m},$$

где  $\mu_a^i(y)$  — функция принадлежности соответствующего нечеткого множества;  $y_{i\min}$ ,  $y_{i\max}$  — границы универсума нечетких переменных.



На основе рассчитанных численных значений  $\bar{y}_i$ ,  $i = 1, m$ , принимается решение по исследуемой проблеме.

Методы нечеткой логики легко реализуются в программном обеспечении САПР на языках высокого уровня, таких как *C*, *Java* и др. В настоящее время разработано много математических программных пакетов, которые в том числе поддерживают и нечеткое моделирование, например расширение *Fuzzy Logic Toolbox* для *MatLab* и *fuzzyTECH* [30].

#### 4.2.7. Методы управления проектами

Успех деятельности большинства предприятий, и прежде всего производящих высокотехнологичную продукцию — радиоэлектронные средства, вычислительную технику, программные продукты, системы управления и связи, во многом определяется способностью оперативно и качественно разрабатывать проекты. Проектные службы фирм, занимающих ведущие позиции в своих отраслях, используют широкий арсенал методов и средств, чтобы опередить конкурентов в создании новой продукции и расширении рынков сбыта. Этот арсенал включает современные информационные технологии маркетинга, управления проектами и рисками, повышения качества и параллельного ведения проектов, в том числе при территориальном рассредоточении проектных групп, функциональное и информационное моделирование, создание интеллектуальных архивов проектов и многопрофильных коллективов, защиту информации, стандартов по управлению проектами и пр. [3].

Любой проект представляет собой последовательность взаимосвязанных операций (решаемых задач), направленных на достижение конкретного значительного результата, например на создание нового продукта, выполнение работ по реинжинирингу и т. п.

Особенностями высокотехнологичных проектов являются: наличие неопределенностей и рисков, большие затраты, многоэтапность и значительное время выполнения работ, командный состав исполнителей, невозможность гарантированного получения ожидаемого результата,

необходимость использования компьютерных технологий и методов параллельного проектирования. Большинство проектов выполняется в условиях конкурса (тендера), в этом случае успех достигается, если результат проектирования имеет ценность выше, чем у конкурентов, и он появляется «в нужное время в нужном месте».

Проект, рассматриваемый как процесс, имеет свой жизненный цикл (ЖЦ). Основными этапами или фазами ЖЦ проекта являются: мотивация и формирование концепции, проведение научно-исследовательских работ (планирование создания продукта), проектирование, производство, внедрение и завершение. Результаты работ одного этапа используются для выполнения последующего. После завершения каждой фазы проекта принимаются ключевые решения.

Управление проектом охватывает процедуры контроля, планирования, распределения и регулирования ресурсов (трудовых, материальных, оборудования) с учетом различных ограничений (технических, бюджетных и временных) на всех этапах ЖЦ проекта [31], [32]. Наиболее ответственной процедурой является принятие ключевых проектных решений при формулировке целей, формировании команды, утверждении перечня работ, рассмотрении целесообразности продолжения проектирования и др.

В общем случае в задаче управления проектом в качестве исходных данных задаются:

- информация, относящаяся к инициации (мотивации) начала работ по проекту;
- ограничения на процесс проектирования (временные, материальные и др.);
- основные требования к предмету (объекту) проектирования;
- имеющиеся ресурсы для выполнения проекта.

В результате решения задачи необходимо:

- выбрать методологию (стандарт) выполнения проекта;
- сформировать команду исполнителей;
- последовательно провести этапы проектирования, решая на каждом этапе задачи по обеспечению мак-

симула вероятности получения успешного конечного результата, или своевременно прекратить работы во избежание излишних затрат.

На выбор методологии и стратегии управления проектом оказывают влияние вид объекта и цели выполнения проекта, характер неопределенностей и рисков, возможность использования информационных технологий и параллельного проектирования.

Важнейшими компонентами, которые должны постоянно учитываться на всех этапах ЖЦ проекта являются риск и затраты.

Под риском обычно понимается вероятность того, что цели проекта не будут достигнуты и его выполнение не принесет ожидаемых результатов. Риск зависит от большого числа факторов, обусловленных недостаточной информацией или случайной природой явлений, от которых зависит успех проекта в целом. К этим факторам относятся нестабильность экономической и политической ситуации, действия конкурентов, ошибки производственного персонала и т. д. Затраты на проект учитывают все виды деятельности и используемые ресурсы в денежной оценке, они могут быть определены методом функционально-стоимостного анализа.

В зависимости от особенностей конкретного проекта и ситуации на отдельно взятом предприятии возможны следующие основные задачи управления проектами:

- 1) задача минимизации риска при ограничении на затраты;
- 2) задача минимизации затрат при ограничении на величину риска;
- 3) задача на удовлетворение ограничений по затратам и риску.

При оценке рисков рекомендуется:

- больше доверять конкретным фактам, а не абстрактным идеям;
- выражать факты в количественной форме, связанной с применением конкретных процедур измерения, а не с помощью слов и эмоций;

- осознать, что наблюдения всегда ведутся над частью целого и поэтому результаты содержат ошибки и отклонения;
- проводить постоянный мониторинг деятельности, так как только в результате многочисленных наблюдений можно выявить устойчивую тенденцию, представляющую собой надежную информацию.

Как риск проекта, так и затраты на проектирование зависят от числа рассматриваемых альтернативных вариантов на стадиях ЖЦ проекта. При этом основным способом снижения риска является увеличение числа вариантов, однако следует иметь в виду, что затраты в данном случае возрастают. Поэтому для управления проектами необходимо использовать модели процесса проектирования, учитывающие число вариантов на каждом этапе ЖЦ.

Модели затрат и риска проекта рассмотрим при следующих предположениях:

- ЖЦ проекта включает предпроектную стадию и  $s$  стадий проектирования;
- число и состав рассматриваемых вариантов на  $i$ -й и  $j$ -й стадиях могут различаться, т. е.  $V_i \neq V_j$ ,  $i, j = 1, s$ ,  $i \neq j$ ;
- общие затраты на проект могут рассматриваться как сумма затрат на отдельных стадиях ЖЦ;
- риск проекта оценивается по формулам умножения вероятностей сложных событий.

Если на  $j$ -м этапе разрабатывается множество альтернативных вариантов  $V_j$ , то общие затраты на выполнение проекта  $z_{\Pi}$  равны

$$z_{\Pi} = z_0 + \sum_{j=1}^s \sum_{v_i \in V_j} z_j(v_i) + \sum_{j=0}^s z_j^{\text{э}}, \quad (4.52)$$

где  $z_0$  — затраты на выполнение предпроектной стадии;  $z_j(v_i)$  — затраты на выполнение работ по варианту  $v_i$  на  $j$ -й стадии;  $z_j^{\text{э}}$  — затраты на проведение сеанса экспертизы при завершении  $j$ -го этапа.

В случае когда затраты на все варианты  $j$ -го этапа одинаковы, формула (4.52) принимает вид

$$z_{\Sigma} = z_0 + z_0^{\circ} + \sum_{j=1}^s (\omega_j z_j + z_j^{\circ}),$$

где  $\omega_j$  — число вариантов, рассматриваемых на  $j$ -м этапе.

Обычно составляющие затрат  $z_j^{\circ}$ ,  $j=1, s$ , зависят от числа вариантов  $\omega_j$ .

В предположении, что события, заключающиеся в успешном выполнении работ по вариантам и стадиям, являются независимыми, для определения риска проекта  $Q_{\Pi}$  может быть использована формула

$$Q_{\Pi} = 1 - (1 - q_0) \prod_{j=1}^s \left( 1 - \prod_{i \in V_j} q_j(v_i) \right), \quad (4.53)$$

где  $q_0$  — риск для предпроектной стадии;  $q_j(v_i)$  — риск варианта  $v_i$  на  $j$ -й стадии.

Если риски на  $j$ -й стадии одинаковы для всех вариантов  $v_i \in V_j$ , то в этом случае (4.53) запишется в виде

$$Q_{\Pi} = 1 - (1 - q_0) \prod_{j=1}^s \left( 1 - q_j^{\omega_j} \right).$$

Формулы (4.52), (4.53) составляют основу модели процесса проектирования, учитывающей различные варианты на этапах ЖЦ проекта. Из этих формул видно, что с увеличением числа рассматриваемых вариантов затраты  $z_{\Pi}$  увеличиваются пропорционально числу вариантов. Зависимость риска  $Q_{\Pi}$  от числа вариантов  $\omega_j$  на  $j$ -м этапе проекта более сложная, с ростом количества вариантов риск проекта уменьшается по зависимости, близкой к гиперболической.

В целом процесс проектирования можно описать функциональной моделью в формате IDEF0, дополненной узлами принятия решений [31], [32]. Схема одного узла модели приведена на рисунке 4.4.

Как видно из рисунка 4.4, основу функциональной модели описания про-

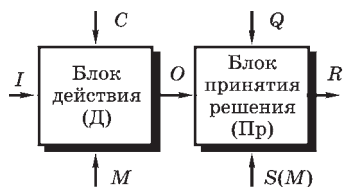


Рис. 4.4  
Модель с узлом принятия решения

цессов на различных стадиях проектных работ с использованием принципа динамической альтернативности составляют узлы из двух блоков — блока действия (Д) и блока принятия решения (Пр), а также входы ( $I$ ), выходы ( $O$ ), управления ( $C$ ), механизмы или ресурсы ( $M$ ), критерий и метод ( $Q$ ), эксперты ( $S$ ) и результаты решения ( $R$ ).

#### 4.2.8. Метод динамической альтернативности

Основная идея метода динамической альтернативности (вариантности) заключается в следующем [31], [32]. На первом этапе проектирования формируется множество (группа) альтернативных вариантов, которые начинают разрабатываться параллельно. После каждого этапа производится сеанс экспертизы и принимается решение о приоритетности вариантов и составе группы.

Метод динамической альтернативности базируется на следующих предпосылках:

1) на каждой фазе выполнения проекта рассматривается несколько альтернативных вариантов;

2) состав группы альтернативных вариантов после завершения очередной фазы может изменяться;

3) в качестве основного критерия при сравнении вариантов рассматривается вероятность достижения успеха (получения желаемого результата);

4) для каждого этапа ЖЦ характерны свои признаки генерации вариантов, например, способ действия объекта; техническое исполнение; учет возможных состояний функционирования и т. д.;

5) исключение «неперспективных» вариантов производится условно, поэтому в случае необходимости к ним можно возвращаться и продолжать их разработку;

6) исходные данные задачи проектирования по мере поступления новой информации в ходе ЖЦ проекта корректируются, и часть расчетов пересматривается (по принципу обратной связи).

При проведении сеансов экспертизы необходимо учитывать, что наблюдения ведутся лишь над частью целого, поэтому результаты содержат ошибки и отклонения; сле-

дует больше доверять конкретным фактам, а не абстрактным идеям; стремиться выражать факты в количественной форме, связанной с применением конкретных процедур измерения, а не с помощью слов и эмоций; устойчивые тенденции можно выявить только в результате многочисленных наблюдений, опирающихся на надежную информацию.

Данные предпосылки соответствуют многим рекомендациям для выполнения ответственных проектов, например: «все подвергай сомнению», «опора на факты», «оптимальное решение на каждом шаге не гарантирует общего оптимального результата», «рассматриваемое число вариантов ограничено возможностями (ресурсами) предприятия», «окончательный результат в ходе проектирования неизвестен».

Повышение эффективности проектирования при использовании метода динамической альтернативности достигается за счет следующих факторов:

- непосредственного рассмотрения нескольких вариантов;
- возможности изменения состава группы альтернативных вариантов по результатам выполнения отдельных этапов;
- проведения анализа вариантов и принятие решения после каждого этапа;
- использования дополнительной информации, поступающей в ходе проектирования, например о характеристиках аналогичного продукта у возможных конкурентов;
- пересмотра ранее принятых решений на основе новой информации, существенной для проекта;
- применения нескольких критериев при сопоставлении вариантов.

Рассматриваемый метод учитывает два аспекта динамики выполнения проекта. Во-первых, на каждой стадии может изменяться число и состав альтернативных вариантов. Во-вторых, на протяжении времени проектирования (оно может составлять несколько месяцев и даже лет) могут изменяться различного рода параметры, относя-

щиеся к постановке задачи и формулировке целей в связи с поступлением информации из внешней среды, например о значениях ключевых компонентов объекта проектирования, их важность и т. д.

Применение метода динамической альтернативности рассмотрим на следующем примере.

В качестве объекта проектирования рассматривается система управления прецизионной шестисекционной печью, используемой для термической обработки заготовок терморезисторов в воздушной среде. Мотивацией проекта является большое энергопотребление, высокий процент брака и относительно низкая надежность нагревательных элементов печи.

Основными стадиями проектирования системы управления являются: предпроектные маркетинговые исследования, формирование концепции, идентификация модели объекта в рамках научно-исследовательской работы, эскизный проект (разработка алгоритмического обеспечения) и техническое проектирование (выбор аппаратных средств и создание программного обеспечения).

Модифицированная функциональная модель комплекса этих работ приведена на рисунке 4.5.

Рассмотрим подробно каждый этап проектирования, т. е. действия  $D_j$  и принятие решений  $Pr_j$ ,  $j = 0, 4$ , в соответствии с рисунком 4.5.

### Этап 1

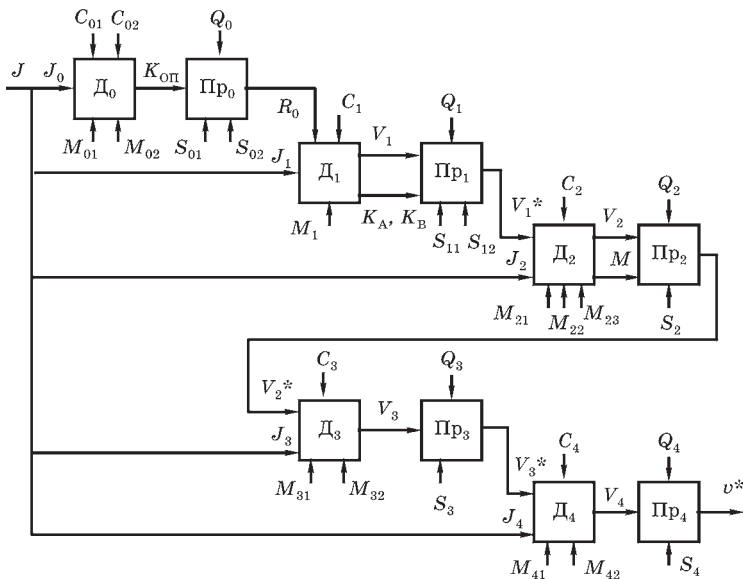
Блок  $D_0$  отвечает за выполнение предпроектной стадии. На основе имеющейся информации  $J_0$  разрабатывается ориентир проектирования системы управления в виде массива ключевых компонентов проекта (ККП)

$$K_{оп} = (k_{э}^{оп}, k_{бр}^{оп}, k_{нд}^{оп}, k_{ок}^{оп}),$$

где  $k_{э}^{оп}$ ,  $k_{бр}^{оп}$ ,  $k_{нд}^{оп}$ ,  $k_{ок}^{оп}$  — коэффициенты, учитывающие соответственно снижение затрат энергии и брака (%), повышение надежности (%) и окупаемость системы управления (лет).

К управлениям  $C_{01}$ ,  $C_{02}$  при разработке ККП следует соответственно отнести технико-экономическую докумен-





**Рис. 4.5**  
Функциональная модель проектирования системы управления

тацию на печь и методику разработки ККП, а к основным ресурсам — персонал службы маркетинга  $M_{01}$  и сетевые ресурсы  $M_{02}$ .

Принимая во внимание неопределенность на рынке сбыта готовой продукции, следует рассматривать две ситуации функционирования печи: нормальное функционирование  $h_1$ , т. е. печь загружена более 50% календарного времени, и функционирование при низкой (<30%) загрузке  $h_2$ . Эти ситуации характеризуются следующими значениями:

$$h_1: p(h_1)=0,6, K_{оп}(h_1)=(4; 6; 5; 2);$$

$$h_2: p(h_2)=0,4, K_{оп}(h_2)=(5; 8; 5; 2,5).$$

Таким образом, выход блока  $D_0$  содержит значения  $K_{оп}(h_i), p(h_i), i=1, 2$ .

Блок  $Pr_0$  (рис. 4.5) предназначен для принятия решения по продолжению работ. Для этого требуется оценить вероятность  $P_0$  успешной реализации проекта. Для этого вычисляются вероятность  $P_{оп}$  правильности выбора

операционных показателей, весовые коэффициенты компонентов ( $c_1, c_2, c_3, c_4$ ) и доли  $d_k(h)$  массивов  $K_{\text{оп}}(h)$ , имеющие достаточные основания для улучшения.

Эти значения определяются как средние на основе высказываний экспертов ( $S_{01}$ ) и численной обработки результатов на автоматизированном рабочем месте (АРМ) проектировщика ( $S_{02}$ ) в соответствии с методикой проведения экспертизы  $Q_0$ . В нашем случае

$$P_{\text{оп}}=0,95; c_1=0,35; c_2=c_4=0,3; c_3=0,05;$$

$$d_k(h_1)=c_1+c_2+c_4=0,95; d_k(h_2)=c_1+c_4=0,65;$$

$$\bar{d}_k = d_k(h_1) \cdot p(h_1) + d_k(h_2) \cdot p(h_2) = 0,83$$

и вероятность успешной реализации проекта

$$P_0 = \bar{d}_k \cdot P_{\text{оп}} \approx 0,79.$$

Расчет  $d_k(h_1)$  проводился в предположении, что есть предпосылки для достижения значений  $k_3^{\text{оп}}, k_{\text{ор}}^{\text{оп}}, k_{\text{ок}}^{\text{оп}}$ , а расчет  $d_k(h_2)$  —  $k_3^{\text{оп}}, k_{\text{ок}}^{\text{оп}}$ .

Полученная вероятность  $P_0=0,79$  (результат  $R_0$ ) достаточно высока и работы следует продолжить, при этом риск составляет около 21%.

### Этап 2

В блоке  $D_1$  (см. рис. 4.5) производится разработка концепции и формирование множества альтернативных вариантов системы управления. В нем на вход подается информация  $J_1$  о моделях, стратегиях и аппаратных средствах. На выходе представлены множество вариантов  $V_1$  и значения массивов ККП для двух групп вариантов —  $K_A$  и  $K_B$ . В качестве управлений  $R_0$  и  $C_1$  рассматривается техническая документация, основной механизм  $M1$  представлен персоналом службы автоматизации.

По результатам изучения технологических режимов печи и существующей системы автоматизированного управления в виде шести систем автоматического регулирования температуры в секциях разработана структура дерева, формирующего варианты  $v_i$  новой системы управления (рис. 4.6).

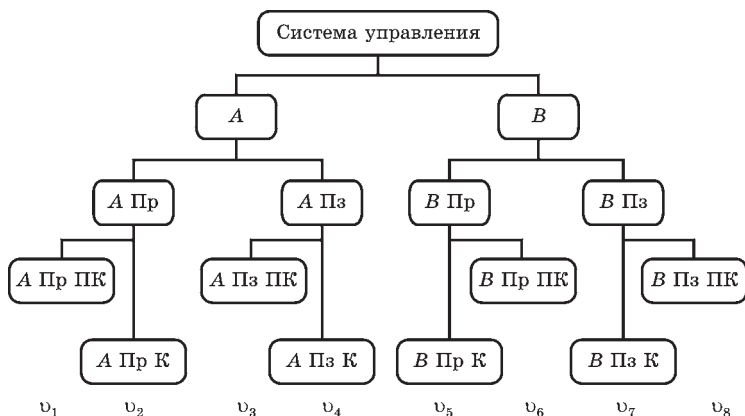


Рис. 4.6

Дерево формирования вариантов системы управления

Как видно из рисунка 4.6, множество  $V_1$  состоит из восьми вариантов, различающихся, кроме вида реинжиниринга ( $A$  и  $B$ ), стратегиями реализации оптимального управления (Пр — программная, Пз — позиционная с обратной связью по фазовым координатам) и аппаратными средствами (ПК — используется компьютер, К — контроллер).

Ветвь  $A$  подмножества вариантов ( $v_1 \triangleq AПрПК$ ,  $v_2 \triangleq AПрК$  и т. д.) предусматривает разработку устройств управления динамическими режимами разогрева (охлаждения) печи и определения оптимальных режимов, обеспечивающих повышение качества продукции при сохранении существующих систем автоматического регулирования. Следовательно, варианты ветви  $A$  следует отнести к категории «мягкого» реинжиниринга.

Варианты ветви  $B$  предусматривают создание новой системы оптимального управления для режимов разогрева (охлаждения) печи и стабилизации температуры. Такие варианты относятся к «жесткому» реинжинирингу.

Следует заметить, что значения массивов ККП в форме «тройственных» оценок (нижняя граница ( $K_H$ ), наиболее вероятное значение ( $\bar{K}$ ) и верхняя граница ( $K_B$ )) имеют обобщенный характер для двух групп вариантов —  $V_A$  с «мягким» реинжинирингом

и  $V_B$  — с «жестким» и обозначаются соответственно  $K_A = (K_A^H, \tilde{K}_A, K_B^B)$ ,  $K_B = (K_B^H, \tilde{K}_B, K_B^B)$ .

Блок **ПР<sub>1</sub>** (см. рис. 4.5) необходим для экспертной обработки «тройственных» оценок вариантов  $(k_{iH}^v, k_i^v, k_{iB}^v)$ ,  $v \in \{V_A \cup V_B\}$ . При поступлении дополнительной информации во время выполнения первого этапа работ могут быть изменены вероятности  $p(h)$ ,  $h \in \{h_1, h_2\}$ , значения  $K_{оп}(h)$ , а также введены новые ситуации. Таким образом, на вход блока сеанса экспертизы поступает множество вариантов  $V_1$  и информация  $K_A, K_B$ . Управлением  $Q_1$  служит методика принятия решений, ресурсами являются персонал ( $S_{11}$ ) и АРМ проектировщика ( $S_{12}$ ), на выход поступает решение о множестве вариантов  $V_1$ .

Возможными итогами принятия решения на данном этапе являются:

- группы вариантов  $V_A$  и  $V_B$  остаются для последующего рассмотрения, если

$$\tilde{K}_A \sim \bar{K}_{оп}, \quad \tilde{K}_B \sim \bar{K}_{оп}, \quad \tilde{K}_A \sim \tilde{K}_B; \quad (4.54)$$

- остается только множество вариантов  $V_A$ , если

$$\tilde{K}_A \sim \bar{K}_{оп}, \quad \tilde{K}_B < \bar{K}_{оп}(h_1), \quad \tilde{K}_B < \bar{K}_{оп}(h_2), \quad \tilde{K}_A > \tilde{K}_B; \quad (4.55)$$

- остается только множество вариантов  $V_B$ , если

$$\tilde{K}_B \sim \bar{K}_{оп}, \quad \tilde{K}_A < \bar{K}_{оп}(h_1), \quad \tilde{K}_A < \bar{K}_{оп}(h_2), \quad \tilde{K}_A < \tilde{K}_B; \quad (4.56)$$

- группы  $V_A$  и  $V_B$  отклоняются для создания новых вариантов, если

$\exists i \in \{\text{э, бр, нд, ок}\}$ :

$$\{(k_i^{оп}(h_1) \cup k_i^{оп}(h_2)) \in [k_{iH}^v; k_{iB}^v]\} \vee \{(k_i^{оп}(h_1) \cup k_i^{оп}(h_2)) \in [k_{iH}^n; k_{iB}^n]\}; \quad (4.57)$$

- работы по проекту прекращаются как неперспективные, если

$\forall i \in \{\text{э, бр, нд, ок}\}$ :

$$\{(k_i^{оп}(h_1) \cup k_i^{оп}(h_2)) \notin [k_{iH}^v; k_{iB}^v]\} \wedge \{(k_i^{оп}(h_1) \cup k_i^{оп}(h_2)) \notin [k_{iH}^v; k_{iB}^v]\}, \quad (4.58)$$

где  $k_{iH}^v, k_{iB}^v$  — минимальное и максимальное значение  $i$ -го компонента  $K_A^H$  ( $K_A^B$ ) или  $K_B^H$  ( $K_B^B$ ); знак  $\notin$  в (4.58) понимается в том смысле, что все значения интервала  $[k_{iH}^v, k_{iB}^v]$ ,  $v \in \{V_A \cup V_B\}$  «хуже» любого  $k_i^{оп}(h)$ ,  $h \in \{h_1, h_2\}$ .

На основе значений  $(K_v^h, \tilde{K}_v, K_v^B)$ ,  $v \in \{V_A, V_B\}$ ,  $K_{оп}(h)$ ,  $h \in \{h_1, h_2\}$  и соотношений (4.54)–(4.58) эксперты назначают тройственные оценки рискам  $(q_h^v, \tilde{q}^v, q_B^v)$  для реализации вариантов  $V_A$  и  $V_B$ . Эти риски используются для подсчета общих рисков по формулам:

$$\begin{aligned} Q_1^v &= [1 - (1 - Q_{оп})(1 - \tilde{q}^v)] \cdot 100\%; \\ Q_{1,j}^v &= [1 - (1 - Q_{оп})(1 - \tilde{q}_j^v)] \cdot 100\%; \\ Q_{оп} &= 1 - P_{оп}; \quad j \in \{h, v\}; \quad v \in \{V_A, V_B\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Используя полученные значения  $Q_1^A, Q_{1,h}^A, Q_{1,v}^A, \tilde{Q}_1^B, Q_{1,h}^B, Q_{1,v}^B$ , принимается решение по результатам выполненных работ на этапе формирования концепции.

Пусть выполняется условие (4.54) и  $(q_h^A = 0,02, \tilde{q}^A = 0,03, q_B^A = 0,05)$ ,  $(q_h^B = 0,04; \tilde{q}^B = 0,05; q_B^B = 0,07)$  тогда в соответствии с (4.59):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1^A &= 1 - 0,95 \cdot 0,97 = 0,0785 \text{ (7,85\%)}; \quad Q_{1,h}^A = 6,9\%; \\ Q_{1,v}^A &= 9,75\%; \quad \tilde{Q}_1^B = 9,75\%; \quad Q_{1,h}^B = 8,8\%; \quad Q_{1,v}^B = 11,65\%. \end{aligned}$$

На основе рассмотрения рисков, учитывая, что стоимость работ следующего этапа незначительно зависит от числа рассматриваемых вариантов, лицо, принимающее решение, считает целесообразным продолжить исследования с вероятностью  $V_1 = V_A \cup V_B$ .

### Этап 3

Назначение блока  $D_2$  (рис. 4.5) — выполнение комплекса научно-исследовательских работ по идентификации модели динамики, выявления связей между входными и выходными переменными, определения оптимальных режимов. На вход подается множество вариантов  $V_1$  и информация  $J_2$ . В качестве управления  $S_2$  рассматривается методика идентификация модели. Ресурсами  $M_{21}$  служат оборудование и приборы для проведения экспериментов,  $M_{22}$  — программный модуль идентификации моделей динамики,  $M_{23}$  — персонал. На выходе блока  $D_2$  — полученная модель динамики  $M$  и сформированное множество вариантов  $V_2$ .

Множество альтернативных вариантов  $V_2$  представляет собой объединение двух подмножеств:  $V_2 = V_A \cup V_B$ .

Кроме того, выделены факторы, которые существенно влияют на показатель  $k_{бр}$ , вместе с тем не обнаружено факторов, имеющих тесную связь с компонентой  $k_{нд}$ . На основе этого пересматриваются значения  $K_{оп}(h_1)$ ,  $K_{оп}(h_2)$  и компонента  $k_{нд}$  из массива ККП исключается. Новые значения  $K_{оп}(h)$ ,  $h \in \{h_1, h_2\}$  равны

$$h_1: p(h_1) = 0,6; K_{оп}(h_1) = (5; 8; 2);$$

$$h_2: p(h_2) = 0,4; K_{оп}(h_2) = (6; 10; 2,5).$$

Соответственно изменяется состав и значения компонентов массивов  $\tilde{K}_v, K_{v,н}, K_{v,в}, v \in V_2$ .

Блок принятия решения **ПР<sub>2</sub>** (см. рис. 4.5) предназначен для проведения сравнительного анализа подмножеств вариантов  $V_A, V_B$  и оценивания для них значений риска. Здесь входными параметрами являются модель динамики  $M$  и множество вариантов  $V_2^n$ , на выход поступают подмножества вариантов  $V_A$  и  $V_B$ . В качестве управления  $Q_2$  рассматриваются методики Парето-оптимизации и расчета рисков. Ресурсами  $S_2$  служат персонал группы экспертов и программное обеспечение модуля принятия решений.

Используя значения  $(K_{v,н}, \tilde{K}_v, K_{v,в}), v \in V_2$  и  $K_{оп}(h), h \in \{h_1, h_2\}$ , методом Парето-оптимизации (см. § 4.2.1) эксперты формируют множество  $V_2^n = \{V_A \cup V_B\}$  и по аналогии с блоком **ПР<sub>1</sub>** с использованием (4.59) определяются риски  $\tilde{Q}_2^v, \tilde{Q}_{2,j}^v, j \in \{н, в\}, v \in V_2^n$ , которые для этих вариантов получились приемлемыми.

Таким образом, по результатам сеанса экспертизы число рассматриваемых на следующих этапах вариантов остается без изменений.

#### Этап 4

Блок **Д<sub>3</sub>** этапа эскизного проектирования (рис. 4.5) выполняет анализ оптимального управления с целью определения возможных видов функций оптимального управления и стратегий реализации управления, а также проводит оценку величины эффекта энергосбережения. На вход блока **Д<sub>3</sub>** подаются множество вариантов

$V_2^{\text{п}}$  и информация  $J_3$ , на выходе блока формируются алгоритмы управления, использующие программную стратегию (Пр), и алгоритмы с позиционной стратегией (Пз). Управлением  $C_3$  служит методика анализа энергосберегающего управления на множестве состояний функционирования, ресурсами  $M_{31}$  и  $M_{32}$  является АРМ проектировщика и обслуживающий персонал соответственно.

Возможные значения эффекта энергосбережения для вариантов  $v \in V_2^{\text{п}} = V_A \cup V_B$  оцениваются с использованием специальных методов теории оптимального управления. Исследования выполняются с учетом возможных изменений напряжения сети и различных видов продукции.

В блоке  $\text{ПР}_3$  (рис. 4.5) осуществляется принятие решения при завершении эскизного проекта. На вход блока поступают алгоритмы управления для вариантов  $V_3 = V_2^{\text{п}}$ , на выходе — сформированное подмножество вариантов  $V_3^*$ . Управлением  $Q_3$  является методика принятия решений в условиях неопределенности, ресурсами  $S_3$  служат персонал группы экспертов и программное обеспечение модуля принятия решений.

Для принятия решения на данном этапе заполняется матрица эффективностей по основному компоненту, т. е. проценту экономии энергетических затрат  $k_3$ . В таблице 4.18 занесены средние значения  $k_3$  для трех состояний функционирования:

- $H_1$  — выпускается одна номенклатура продукции при стабильном напряжении сети;
- $H_2$  — один вид продукции и возможны колебания напряжения сети;
- $H_3$  — выпускается продукция разных видов, что требует изменения заданной температурного режима.

Таблица 4.18

Матрица эффективностей по энергетическим затратам

Варианты	Состояния функционирования			Рассчитанные критерии			
	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$q_{\text{рв}}$	$q_{\text{г}}$	$q_{\text{ш}}$	$q_{\text{мм}}$
$V_{\text{АПр}} \cup V_{\text{АПз}}$	6	5	7	6	6	5,5	5
$V_{\text{ВПр}} \cup V_{\text{ВПз}}$	9	11	10	10	10	9,5	9

Данные таблицы 4.18 обрабатываются методами равной вероятности (критерий  $q_{PB}$ ), Гурвица ( $q_G$ ), Шаньявского ( $q_{Ш}$ ) и максимина ( $q_{MM}$ ) (см. § 4.2.2). Рассчитанные значения критериев (при весовом коэффициенте  $c=0,5$  для критериев Гурвица и Шаньявского) приведены в правой части таблицы 4.18.

С учетом того, что следующий этап технического проектирования требует значительных трудозатрат, необходимо существенно сократить число вариантов системы. Матрице эффективности (см. табл. 4.18) соответствует матрица упущенных возможностей (табл. 4.19) для определения критерия Сэвиджа (см. § 4.2.2).

Таблица 4.19

Матрица упущенных возможностей

Варианты	Состояния функционирования			Рассчитанные критерии	
	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$r_{i \max}$	$q_c$
$V_{АПР} \cup V_{АПЗ}$	3	6	5	6	4
$V_{ВПР} \cup V_{ВПЗ}$	0	0	2	2	1

В соответствии с используемыми критериями наиболее предпочтительными следует считать варианты  $v \in \{V_{ВПР} \cup V_{ВПЗ}\}$  (рис. 4.6). Таким образом, число вариантов проекта сокращается до четырех.

### Этап 5

Блок  $D_4$  этапа технического проектирования (рис. 4.5) предназначен для разработки алгоритмического и программного обеспечения системы автоматизированного управления для отобранных на предыдущем этапе вариантов. На вход блока поступает информация  $J_4$  и варианты  $V_3^* = V_{B,ПР} \cup V_{B,ПЗ}$ . Управлением  $C_4$  являются методики проектирования алгоритмического и программного обеспечения, механизмом  $M_{41}$  — АРМ проектировщика, ресурсом  $M_{42}$  — персонал. На выходе блока — рабочая документация на варианты  $v_5, v_6, v_7, v_8$ .

В ходе выполнения данного этапа должен быть разработан вариант системы управления, пригодной для окончательной реализации. Используя возможности специальной SCADA — системы (TRACE MODE, КРУГ-2000 или им подобные) [33] разрабатывается полное алгорит-



мическое и программное обеспечение для вариантов системы автоматизированного управления  $v_5-v_8$ .

Следует отметить, что варианты  $v_6$  и  $v_8$ , использующие компьютер, обладают большими функциональными возможностями, чем варианты  $v_5$  и  $v_7$  (на контроллерах). Вместе с тем последние варианты дешевле, для них меньше срок окупаемости. Варианты  $v_7, v_8$  имеют несколько выше точность соблюдения технологического регламента.

Блок  $ПР_4$  сеанса экспертизы (рис. 4.5) предназначен для выбора одного из четырех вариантов для практического внедрения. Входной информацией служат алгоритмы управления для вариантов  $v_5, v_6, v_7, v_8$ . На выходе блока — документация на выбранный вариант. В качестве управления  $Q_4$  используется методика принятия решений в условиях частичной неопределенности, ресурсами  $S_4$  служат персонал группы экспертов и программное обеспечение модуля принятия решений.

Для принятия решения использован метод иерархического анализа (см. § 4.2.2), в качестве критериев учитываются энергосбережение ( $k_э$ ), снижение доли брака ( $k_{бр}$ ) и затраты ( $k_{ок}$ ). Структура иерархии и результаты промежуточных расчетов для этого случая приведены на рисунке 4.7.

Расчет рейтингов вариантов показывает, что  $R(v_5)=0,228$ ,  $R(v_6)=0,24$ ,  $R(v_7)=0,2566$  и  $R(v_8)=0,2754$ .

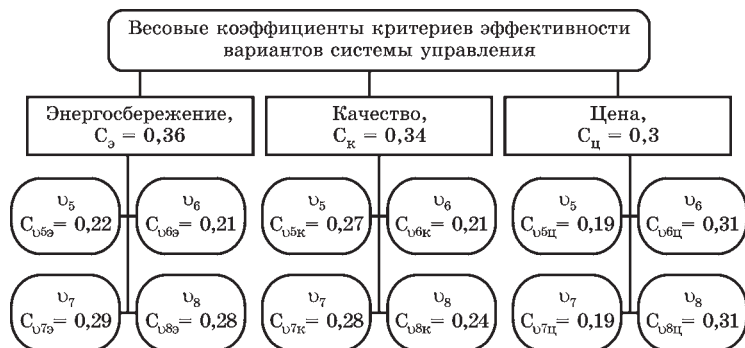


Рис. 4.7  
Структура иерархии

Таким образом, в качестве оптимального выбирается вариант  $\nu_8$ , в котором используется позиционная стратегия и техническое средство — контроллер.

Рассмотренный пример показывает, что использование метода динамической альтернативности расширяет возможности управления высокотехнологичными проектами за счет перераспределения состава альтернатив на стадиях жизненного цикла, более полного использования поступающей информации и эволюции методов принятия решений по мере уменьшения неопределенности при проектировании.

### **4.3. ЗАДАЧИ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

Основными задачами схмотехнического проектирования являются выбор элементной базы, разработка принципиальных схем частей ЭС, структурный и параметрический синтез схем, анализ чувствительности и др. При решении задач схмотехнического проектирования используются математические модели, отображающие физические процессы, которые протекают в схемах и трактах радиосистем. Результатом выполнения работ данного этапа является техническое решение в виде аппаратной реализации ЭС с конкретным набором выбранных характеристик, отвечающих заданным критериям на проектирование.

К наиболее сложным и ответственным задачам схмотехнического проектирования относятся задачи структурного и параметрического синтеза, которые решаются как задачи оптимизации в тесной взаимосвязи с соответствующими задачами анализа. Сначала решается задача структурной оптимизации, а затем для выбранной структуры — задача параметрической оптимизации. При использовании САПР задачи структурного и параметрического синтеза, разработки конструкции и другие формулируются как задачи оптимального проектирования. В обобщенном виде задача оптимального проектирования формулируется следующим образом [3].

Для проектируемого объекта выделяется вектор (совокупность) независимых переменных  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , которые можно изменять при выработке проектных решений и от которых зависят показатели качества объекта. Переменные  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  называют переменными проектирования или варьируемыми переменными, они могут иметь различную природу в зависимости от решаемой задачи, например отражать геометрические размеры компонентов, способы их включения и др. Задаются допустимые области изменения этих переменных, т. е.  $x_i \in [x_i^H, x_i^B]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $x_i^H, x_i^B$  — нижняя и верхняя граничные значения переменной  $x_i$  соответственно. Вводится критерий оптимальности (целевая функция)  $Q(X)$ , который при выборе наилучших значений  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  принимает экстремальное, т. е. максимальное или минимальное значение. Кроме того, записываются различного рода ограничения и условия  $g_j(X)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , тесно связанные с обеспечением выполнения проектируемым объектом требуемых функций и получением необходимых технических характеристик. Эти ограничения могут иметь вид равенств или неравенств. Следует заметить, что в зависимости  $Q(X)$ ,  $g_j(X)$ ,  $j = \overline{1, m}$  обычно являются нелинейными.

С использованием введенных обозначений задача оптимального проектирования математически формулируется следующим образом. Требуется определить такие значения переменных проектирования  $x_i^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при которых выполняются все ограничения:

$$\begin{aligned} g_j(x_1^*, \dots, x_n^*) & \begin{cases} > 0, \\ < 0, \end{cases} j = \overline{1, m}; \\ x_i^* & \in [x_i^H, x_i^B], i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

и критерий оптимальности достигает экстремального значения

$$Q^*(X^*) = \underset{X}{\text{extr}} Q(X). \quad (4.61)$$

Если функции  $Q(X)$  и  $g_j(X)$ ,  $j = \overline{1, m}$  известны, то задача (4.60)–(4.61) относится к классу задач математического

программирования, в котором, в свою очередь, выделяют задачи линейного и нелинейного программирования. В первом случае функции  $Q(X)$ ,  $g_j(X)$ ,  $j = \overline{1, m}$  представляют собой линейные зависимости от переменных  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а во втором — нелинейные. Если переменные  $x_i$  могут принимать только дискретные значения (например, номиналы элементов схемы электрической принципиальной) или целочисленные значения (например, число каскадов усилителя), то решается задача дискретного программирования. Для решения этих задач используются соответственно методы линейного, нелинейного и целочисленного программирования.

Стандартная задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Задается система  $m$  линейно независимых неравенств с  $n$  неизвестными  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1; \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m; \end{aligned}$$

и целевая функция (линейная форма)

$$Q(X) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n.$$

Требуется определить такие значения  $x_i^*$ ,  $i = \overline{1, n}$  ( $x_i \geq 0$ ), при которых критерий  $Q(X)$  достигает максимального (в задаче на максимум) или минимального (в задаче на минимум) значения.

Основным методом решения задач линейного программирования является симплекс-метод, который подробно описан во многих учебниках и реализуется в ряде пакетов прикладных программ [27].

При решении практических задач проектирования ЭС и технологических процессов ограничения (4.60) и критерий (4.61) обычно описываются нелинейными зависимостями, т. е. имеют место задачи нелинейного программирования (в том числе выпуклое, квадратичное программирование и др.). Для решения задач нелинейного программирования в зависимости от особенностей функций  $q_i(X)$ ,  $j = \overline{1, m}$  и  $Q(X)$  применяются методы неопреде-

ленных множителей Лагранжа, градиентный метод, метод наискорейшего спуска, Ньютона и ряд других.

Рассмотрим основные соотношения решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$Q(X) \rightarrow \max_{X \in S}; \quad S: g_i(X) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

методом неопределенных множителей Лагранжа.

Сначала записывается функция Лагранжа

$$L(X, Y, \lambda) = Q(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(X) + y_i^2),$$

где  $y_i^2$  — дополнительные переменные, которые аддитивно добавляются к левой части ограничений — неравенствам для преобразования их в равенства.

Далее задача решается с использованием необходимых условий экстремума Куна — Таккера:

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \geq 0;$$

$$\nabla Q(X) - \lambda \nabla g(X) = 0;$$

$$\lambda_i g_i(X) = 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$g_i(X) \leq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

в которых

$$\nabla Q(X) = \left[ \frac{\partial Q}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right]^T; \quad \nabla g(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Для численного решения задач линейного и нелинейного программирования можно использовать такие широко известные специализированные программные продукты, как Matlab, Maple, MathCad и др. В последнее время для решения задач линейного программирования часто применяют надстройку Microsoft Excel «Поиск решения» (Solver), в которой такие задачи решаются методом Ньютона или сопряженных градиентов.

### 4.3.1. Методы решения задач структурного синтеза

В общем случае под структурой проектируемого ЭС понимают состав основных компонентов с описанием их важнейших характеристик и связей между ними. Задача структурного синтеза (ЗСС) заключается в определении оптимальной структуры системы для реализации содержащихся в техническом задании функций в соответствии с выбранным на этапе системотехнического проектирования принципом действия. В результате решения ЗСС определяется перечень составных частей системы, формируются схемы размещения электронных компонентов с указанием их типов, составляются таблицы электрических соединений элементов, разрабатываются алгоритмы функционирования и т. д.

Большинство задач структурного синтеза трудно формализуемы, поэтому обычно они сводятся к формированию множества альтернативных вариантов структурных решений и выбора наиболее предпочтительного варианта одним из методов, рассмотренных в § 4.2.1–4.2.6.

Сложность формализации ЗСС вызывается большим числом факторов, которые влияют на различные виды структур, их свойства и параметры. Следует заметить, что состав вектора независимых переменных  $X$  в задаче оптимального проектирования (4.60)–(4.61) для каждой структуры может сильно различаться, что неизбежно приводит к сильному увеличению числа варьируемых переменных и размерности задачи [3].

Для преодоления этих трудностей удобно использовать блочно-иерархический подход, в основе которого лежит разбиение процесса проектирования на взаимосвязанные иерархические уровни. В соответствии с этим принципом структура всей системы декомпозируется на определенные функциональные части, блоки, устройства и т. д. [34]. Иерархический подход уменьшает число рассматриваемых вариантов на каждом уровне. В зависимости от особенностей синтезируемых структур различают задачи одномерного, схемного и геометрического синтеза.

По вычислительным возможностям выделяют ЗСС с полным перебором альтернативных вариантов (ког-

да число вариантов невелико) и задачи, в которых рассмотреть все варианты за приемлемое время невозможно (например, множество вариантов структур является счетным). Во втором случае получение точных решений ЗСС обычно не представляется возможным и здесь широкое применение находят различные эвристические приближенные методы, позволяющие при небольших вычислительных затратах получать решения, близкие к оптимальным.

При разработке оптимальной структуры важная роль отводится задачам анализа качества структуры системы, в том числе проверке существования решения задачи, устойчивости используемых алгоритмов и т. п.

С точки зрения информационных технологий структурный синтез рассматривается как преобразование исходной информации, содержащей описание требований к системе, ее функциональные характеристики, условия эксплуатации, а также ограничения, накладываемые на элементную базу и т. п., в информацию о составе элементов, значениях их параметров, способах соединения и т. д. Для такого описания используются специализированные языковые средства, в частности язык VHDL для электроники, который обеспечивает функциональное, поведенческое и структурное описание системы. Другим примером является универсальный язык спецификаций EXPRESS, предназначенный для представления данных и обмена информацией в CALS-технологиях [6].

Для решения ЗСС в настоящее время используется большое число различных методов, в том числе дискретное математическое программирование, метод ветвей и границ, методы локальной оптимизации и поиска с запретами, методы распространения ограничений, эволюционные методы, генетические алгоритмы и др.

В ряде случаев при решении ЗСС целесообразно использовать функциональный подход, при котором назначение проектируемой системы задается выполняемыми функциями  $F = (f_1, \dots, f_m)$ . Вариант структуры системы с функциями  $F$  задается номенклатурой элементов, реализующих функции  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m_1})$ . При этом набор функций

Ф должен обеспечивать выполнение функций  $F$  системы и позволять решать задачи ее дальнейшей модернизации.

Для представления альтернатив в информационно-поисковых системах при решении ЗСС используются разные виды описаний, в том числе [1]:

- представление множества альтернатив  $A$  кортежем

$$A = \langle M, E \rangle,$$

где  $M$  — метод (алгоритм);  $E$  — набор элементов;

- морфологические таблицы  $T$  вида

$$T = \langle Y, R \rangle,$$

где  $Y$  — множество функций (свойств, характеристик) проектируемого объекта;  $R$  — множество способов реализации соответствующих функций;

- альтернативные И-ИЛИ-графы (деревья) иерархического типа, у которых вершины отождествляются с логическими операциями, а ребра — со значениями функций и др.

Для решения ЗСС широкое применение находят морфологические методы синтеза систем. Морфологический синтез новых структурных решений включает следующие этапы:

- декомпозиция проектируемой системы на обобщенные функциональные подсистемы;
- выделение подмножеств альтернативных вариантов  $A_{ij}$  для каждой из подсистем;
- синтез всей системы на основе комбинированных альтернативных вариантов ее подсистем;
- выбор из полученных вариантов наиболее предпочтительной или оптимальной по некоторому критерию комбинации;
- реализация полученной комбинации в виде действующего макета и экспериментальная проверка [35].

Для альтернативных вариантов подсистем  $A_{ij}$ ,  $j = 1, k_i$  формулируются существенные функциональные  $f_{iv}$  и конструктивные  $k_{iu}$  (а в случае необходимости и технологические) признаки. Полученная информация систематизируется в виде морфологической таблицы.



Например, в качестве обобщенных функциональных подсистем для радиолокационной станции могут рассматриваться: антенная система, приемопередающий модуль, система обработки информации, система автоматического распознавания и АРМ оператора. В этом случае составляется морфологическая таблица, содержащая информацию об альтернативах  $A_{ij}$  с функциональными  $f_{iv}$  и конструктивными  $k_{i\mu}$  признаками (табл. 4.20). Вариант структуры проектируемой системы представляет собой кортеж  $S_j$ , содержащий по одной альтернативе из каждой строки морфологической таблицы, т. е.

$$S_j = \langle A_{1i}, A_{2v}, \dots, A_{L\mu} \rangle, \quad i = \overline{1, k_1}; \quad v = \overline{1, k_2}, \quad \mu = \overline{1, k_L},$$

где  $L$  — число обобщенных функциональных подсистем.

Возможные варианты структур образуют морфологическое множество  $\Phi$ , равное

$$\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_L,$$

где  $\Phi_i, i = \overline{1, L}$  — множество альтернатив  $i$ -й строки морфологической таблицы.

Таблица 4.20

Морфологическая таблица

Обобщенные функциональные подсистемы	Функциональные $f_{iv}$ и конструктивные $k_{i\mu}$ значения признаков альтернативы $A_{ij}$			
ОФПС <sub>1</sub> — АС	$A_{11}$ $f_{11}, f_{12}, \dots$ $k_{11}, k_{12}, \dots$	$A_{12}$ $f_{11}, f_{12}, \dots$ $k_{11}, k_{13}, \dots$	...	$A_{1k_1}$ $f_{11}, f_{12}, \dots$ $k_{11}, k_{14}, \dots$
ОФПС <sub>2</sub> — ППМ	$A_{21}$ $f_{21}, f_{22}, \dots$ $k_{21}, k_{22}, \dots$	$A_{22}$ $f_{21}, f_{22}, \dots$ $k_{21}, k_{24}, \dots$	...	$A_{2k_2}$ $f_{22}, f_{24}, \dots$ $k_{23}, k_{24}, \dots$
ОФПС <sub>3</sub> — СОИ	...	...	...	...
ОФПС <sub>4</sub> — САР	...	...	...	...
ОФПС <sub>4</sub> — АРМ	$A_{51}$ $f_{51}, f_{52}, \dots$ $k_{51}, k_{52}, \dots$	$A_{52}$ $f_{51}, f_{54}, \dots$ $k_{53}, k_{54}, \dots$	...	$A_{5k_5}$ $f_{53}, f_{56}, \dots$ $k_{53}, k_{57}, \dots$

ОФПС — обобщенная функциональная подсистема; АС — антенная система; ППМ — приемопередающий модуль; СОИ — система обработки информации; САР — система автоматического распознавания; АРМ — автоматизированное рабочее место.

Число возможных вариантов  $N$ , т. е. мощность множества  $\Phi$ , равно

$$N = \prod_{i=1}^L k_i.$$

Для последующего решения ЗСС на основе полученного морфологического множества  $\Phi$  используются в основном два подхода. Первый предполагает наличие одного или нескольких прототипов проектируемого объекта и сформулированные требования к улучшаемым характеристикам прототипов. Вторым подходом используется при синтезе новой системы в отсутствие прототипа.

При реализации первого подхода используются следующие методы:

- непосредственного оценивания критериев качества альтернатив;
- морфологического синтеза на основе попарного сравнения альтернатив;
- исключения наихудших вариантов;
- расстановки приоритетов;
- оценки мер сходства и различия альтернативного варианта с прототипом и другие методы.

Решение ЗСС с использованием второго подхода производится методами принятия проектных решений в условиях нечеткой и неполной исходной информации (см. § 4.2.1–4.2.6). Для получения наиболее рациональной структуры системы здесь используется понятие «полезности» и формируется система показателей, конкретизирующих цель выбора. Эти показатели характеризуют качество проектируемого объекта, его функциональное назначение, экологичность, соответствие нормативным международным нормам, защищенность патентами и т. д.

#### 4.3.2. Метод анализа структурных схем

Электронные средства и их отдельные функциональные узлы часто представляются в виде структурных схем, для анализа которых существует специально разработанный математический аппарат, включающий набор пре-

образований [18]. Широкое использование структурных схем связано с тем, что такое графическое представление позволяет в краткой и удобной форме отобразить основные характеристики ЭС и определить связь между его входными и выходными сигналами.

Входной импеданс, т. е. комплексное сопротивление каждого блока для гармонического сигнала, входящего в структурную схему, предполагается стремящимся к бесконечности, а выходной импеданс — близким к нулю. На структурной схеме на каждом входящем в нее блоке обозначают его функциональное назначение, математическая запись которого может отражать простые зависимости между входными и выходными переменными, а может быть и комплексной математической функцией, например включающей преобразование Лапласа.

Суммирование и вычитание сигналов выполняется с помощью специальных блоков, которые называют суммирующими. На рисунке 4.8*а–в* показано несколько вариантов таких блоков, имеющих несколько входов, суммирующих и вычитающих входные сигналы в одной точке.

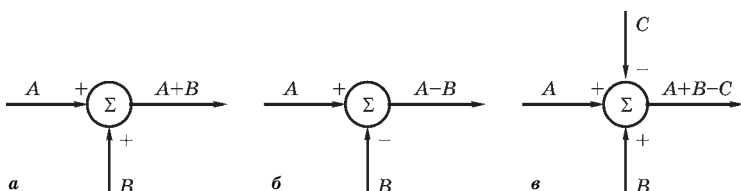


Рис. 4.8

Выполнение операций над сигналами:

*а* — сложения; *б* — вычитания; *в* — сложения и вычитания.

В качестве примера на рисунке 4.9 приведены блоки, применяемые в типовых ЭС с обратной связью, а на рисунке 4.10 — многоконтурные цепи обратной связи.

Необходимо отметить, что многоконтурные цепи обрат-

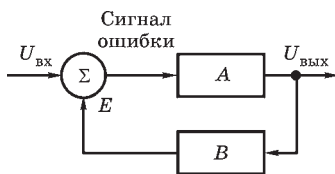


Рис. 4.9

Структурная схема с обратной связью

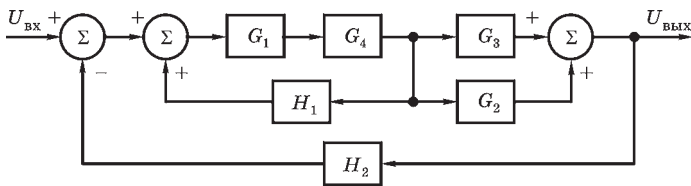


Рис. 4.10

Многоконтурные цепи обратной связи

ной связи, подобные приведенным на рисунке 4.10, обычно сводят к системе с одной цепью обратной связи путем преобразования соответствующих уравнений и их решений относительно выходных и входных сигналов в виде  $U_{\text{ВЫХ}}/U_{\text{ВХ}}$ , как показано на рисунке 4.11.

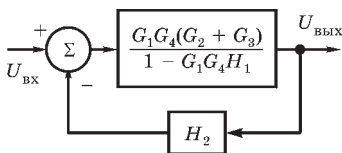


Рис. 4.11

Сведение многоконтурных цепей обратной связи к системе с одной цепью

Существуют общие правила, согласно которым этапы упрощения структурных схем выполняют в следующем порядке:

1. Объединяют последовательные блоки.
2. Объединяют параллельные блоки.
3. Исключают внутренние цепи обратной связи.
4. Переносят суммирующие блоки в левую часть схемы.
5. Располагают блоки разветвления с правой стороны схемы.

6. Повторяют этапы 1–5 до тех пор, пока не будет образована каноническая форма структурной схемы с обратной связью (см. рис. 4.9), для которой в общем случае справедливы зависимости:

$$\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{A}{1 + AB} \quad \text{и} \quad E = \frac{U_{\text{ВХ}}}{1 + AB}.$$

Когда в системе много входов, для каждого из них формируется своя структурная схема. Стабильность системы

с обратной связью не зависит от входных сигналов, но выходной сигнал определяется входным. При нескольких входах в системе анализируются ее отклики на каждый из входных сигналов, а затем полученные результаты складываются между собой в соответствии с принципом суперпозиции. В таблице 4.21 показаны примеры преобразований, позволяющих упростить многоконтурные цепи обратной связи до одной цепи.

Таблица 4.21

Примеры преобразований структурных схем

Цель преобразования	Исходная схема	Результат
Объединение последовательных блоков		
Объединение параллельных блоков		
Исключение петли обратной связи		
Перемещение сумматора к входу		
Перемещение сумматора к выходу		
Перемещение вывода данных к входу		
Перемещение вывода данных к выходу		

Таким образом, структурные схемы любых систем с обратной связью могут быть упрощены до канонической формы, для анализа работы которой используется один и тот же математический аппарат.

### 4.3.3. Методы решения задач параметрического синтеза

Задача параметрического синтеза (ЗПС) заключается в выборе или расчете наилучших значений параметров системы, имеющей определенную структуру. При этом должны учитываться все требования технического задания на проектируемое ЭС, т. е. выходные показатели ЭС должны соответствовать требуемым. ЗПС, в отличие от задач структурного синтеза, хорошо формализуются, часто их называют задачами параметрической оптимизации.

Для математической постановки ЗПС вводятся векторы варьируемых переменных (параметров)  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и выходных переменных  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$  [3]. Переменные  $X$  и  $Y$  связаны определенными соотношениями, входящими в состав модели системы. Вектор выходных параметров, соответствующий требованиям технического задания, обозначим как  $Y^0$ .

Обычно ЗПС формулируется как задача математического программирования, т. е. требуется определить такое значение вектора  $X^*$ , при котором выбранная целевая функция  $Q(X)$  достигает экстремального значения и выполняются все накладываемые на  $X$  ограничения. Для определенности будем считать, что критерий  $Q(X)$  минимизируется. В этом случае математическая формулировка ЗПС имеет вид:

$$X^* = \arg \min_{X \in \mathcal{X}_{\text{доп}}} Q(X, Y^0);$$

$$g(x, Y) = 0, h(X, Y) \geq 0,$$

где  $\mathcal{X}_{\text{доп}}$  — область допустимых значений изменения  $X$ ;  $g(X, Y)$ ,  $h(X, Y)$  — векторные функции, описывающие условия и ограничения на  $X$  и  $Y$ .

В качестве целевой функции часто используют следующие критерии:

- максимальное значение модуля отклонения выходных характеристик  $\tilde{y}_j(X)$  от заданных  $y_j^{(0)}$ ,  $j = \overline{1, k}$  с учетом весовых коэффициентов  $c_j$ , т. е.

$$Q(X) = \max_j \{c_j |y_j^{(0)} - \tilde{y}_j(X)|; j = \overline{1, k}\};$$

- среднеквадратичное отклонение между  $\tilde{y}_j$  и  $y_j^{(0)}$ :

$$Q(X) = \sqrt{\sum_{j=1}^k c_j (y_j^{(0)} - \tilde{y}_j(X))^2}$$

и др.

Необходимо отметить, что выбор  $Q(X)$  носит весьма субъективный характер, поэтому в результате решения ЗПС мы получаем оптимальное решение в смысле используемого критерия. При задании значений  $y_j^{(0)}$ ,  $j = \overline{1, k}$  следует ориентироваться на лучшие (эталонные) образцы с учетом последних научно-технических достижений.

Определяющее значение в задачах параметрического синтеза имеет выполнение условий работоспособности проектируемого ЭС. Эти условия определяются требуемыми соотношениями между расчетными значениями выходных переменных (параметров)  $\tilde{y}_j$ ,  $j = \overline{1, k}$  и задаваемыми техническими требованиями значениями  $y_j^{(0)}$ ,  $j = \overline{1, k}$ . В общем случае такие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j &< y_j^{(0)}, j = \overline{1, k_1}; \\ \tilde{y}_j &> y_j^{(0)}, j = \overline{k_1 + 1, k_2}; \\ \tilde{y}_j &= y_j^{(0)} \pm \Delta y_j, j = \overline{k_2 + 1, k_3}, \end{aligned}$$

где  $\Delta y_j$  — допустимое отклонение расчетного значения  $\tilde{y}_j$  от указанного в техническом задании.

Обычно постановка ЗПС включает следующие основные этапы:

- выбор целевой функции  $F$ ;
- выделение управляемых (варьируемых)  $X$  и выходных  $Y$  переменных (параметров);
- назначение ограничений на  $X$  и  $Y$ ;
- нормирование компонентов  $X$  и  $Y$ .

Отдельные составляющие выходных переменных могут представлять собой качественные характеристики, которые при численном решении ЗПС оцениваются баллами.

В большинстве случаев критерий оптимальности имеет векторный характер, при этом направленное изменение какого-либо компонента  $x_i \in X$  может приводить к улучшению одних выходных параметров ЭС и ухудшению других. Такие задачи относятся к классу многокритериальных, для их сведения к задачам математического программирования применяются различные способы свертки векторного критерия в скалярную целевую функцию.

Наиболее часто в качестве скалярной целевой функции используются следующие:

1) частный критерий, когда среди составляющих вектора  $Y$  можно выделить один основной показатель, например для передатчика это может быть мощность, для приемника — чувствительность и т. д.;

2) взвешенный аддитивный критерий:

$$Q(X) = \sum_{j=1}^k c_j y_j^{(-)}(X) - \sum_{j=k_1+1}^k c_j y_j^{(+)}(X),$$

где  $y_j^{(-)}(X)$ ,  $y_j^{(+)}(X)$  — выходные параметры, которые соответственно следует уменьшать (энергопотребление, масса, габариты и т. п.) и увеличивать (помехоустойчивость, быстродействие, чувствительность, надежность и др.);

3) мультипликативный критерий вида

$$Q(X) = \prod_{j=1}^k y_j^{(-)}(X) / \prod_{j=k_1+1}^k y_j^{(+)}(X),$$

для которого предполагается, что значения  $y_j^{(-)}$ ,  $y_j^{(+)}$  не могут принимать нулевых значений.

Иногда в результате решения ЗПС необходимо обеспечить наилучшее совпадение функции изменения выходного параметра  $\tilde{y}(X, \gamma)$ , зависящей от аргумента  $\gamma$ , с заданной функцией  $y^{(0)}(X, \gamma)$ . В зависимости от характера функции в качестве аргумента используются часто-



та (для частотных характеристик), время (для временных характеристик) и т. п. В этих случаях в интервале изменения аргумента выделяются узловые точки  $\gamma_i, \overline{1, l}$  и в качестве целевой могут использоваться следующие функции:

$$Q(X) = \sum_{i=1}^l c_i |\tilde{y}(X, \gamma_i) - y^{(0)}(X, \gamma_i)|;$$

$$Q(X) = \sum_{i=1}^l c_i (\tilde{y}(X, \gamma_i) - y^{(0)}(X, \gamma_i))^2;$$

$$Q(X) = \max \{c_i |\tilde{y}(X, \gamma_i) - y^{(0)}(X, \gamma_i)|; i = \overline{1, l}\},$$

где  $c_i$  — весовой коэффициент, соответствующий важности точки  $\gamma_i$ .

При назначении ограничений выделяют:

- прямые ограничения на варьируемые переменные

$$x_i \in [x_i^{\text{н}}, x_i^{\text{в}}], i = \overline{1, n},$$

где  $x_i^{\text{н}}, x_i^{\text{в}}$  — нижняя и верхняя границы интервала изменения переменной  $x_i, i = \overline{1, n}$  соответственно;

- функциональные ограничения типа равенств

$$g(x, y) = 0;$$

- функциональные ограничения типа неравенств

$$h(x, y) > 0.$$

Векторные функции  $g(x, y), h(x, y)$  обычно представляют собой условия работоспособности по выходным параметрам, которые не вошли в целевую функцию. Прямые и функциональные ограничения задают область изменения  $X$  при решении ЗПС, т. е. допустимую область поиска  $D_X$ . Любое значение  $X \in D_X$  является допустимым решением ЗПС. Если функциональные ограничения совпадают с условиями работоспособности, то  $D_X$  в этом случае часто называют областью работоспособности.

Нормирование компонентов переменных  $X$  и  $Y$  вводится для приведения их к безразмерному виду или одина-

ковой размерности с целью облегчения процедур поиска решений в многомерном пространстве. Широкое распространение находит способ логарифмического нормирования, когда переменная  $x_i$  преобразуется к безразмерному виду  $\dot{x}_i$  по формуле

$$\dot{x}_i = \ln(x_i / \Delta x_i),$$

где  $\Delta x_i$  — единичное значение переменной  $x_i$ .

В качестве примера постановки задачи параметрического синтеза рассмотрим задачу синтеза параметров антенны в виде линейки из  $n$  элементарных излучателей. Диаграмма направленности такой антенны может быть записана в виде

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^n k_i \frac{\sin(b_i \sin \theta)}{\sin d \sin \theta} \cos(x_i \sin \theta + \varphi_i),$$

где  $\theta$  — угол в азимутальной плоскости;  $k_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $x_i$  и  $b_i$  — коэффициент усиления, фаза возбуждающего напряжения, относительная координата и характеристический параметр  $i$ -го излучателя соответственно;  $d$  — константа.

На взаимное расположение излучателей задаются габаритные ограничения:

$$G: \Delta x_i = |x_{i+1} - x_i| \geq \Delta x_{\text{доп}}, \quad \sum_{i=1}^n \Delta x_i = L.$$

Требуется определить такие значения варьируемых переменных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ , которые при заданных ограничениях обеспечивают минимальный относительный уровень максимального по величине бокового лепестка  $\Phi(\theta) = F(\theta)/F(0)$  общей диаграммы направленности

$$\min \Phi(\theta) = \min_{X, K, \varphi} \max_{\theta} \frac{|F(\theta); X, K, \varphi|}{F(0)}.$$

Для решения данной задачи может использоваться один из градиентных методов поиска.

#### 4.3.4. Методы обработки результатов статистического эксперимента

При решении задач допускового анализа и синтеза часто возникает необходимость в проведении серии имитационных экспериментов, в каждом из которых имитируются входные сигналы, поступающие на объект, а также состояния и поведения отдельных узлов и блоков ЭС. Работа проектируемого устройства оценивается путем многократного расчета реакции ЭС на случайные воздействия внешних факторов или случайные вариации параметров ее устройств. Следовательно, для выполнения такой оценки требуется провести анализ накопленной информации с использованием тех или иных методов обработки статистических данных.

Для решения подобных задач широкое распространение получил численный метод Монте-Карло, основанный на применении вероятностных моделей. Его достоинством является универсальность и, как следствие, пригодность для анализа различных процессов, на протекание которых влияют случайные факторы. Рассмотрим этот метод более подробно [6].

Метод Монте-Карло применительно к решению задач допускового анализа предполагает выполнение следующих этапов.

1. Выполняется генерация случайной реализации вектора параметров компонента ЭС  $V_k$ , в котором каждая компонента  $v_{k_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  генерируется в соответствии с необходимыми статистическими характеристиками (закон распределения случайной величины, математическое ожидание, дисперсия, корреляция и др.).

2. Проводится моделирование компонента ЭС с данным вектором параметров и определяется реализация внешних характеристик  $X_k$ .

3. По полученным внешним характеристикам вычисляется функция качества  $F_k$ .

4. В зависимости от требуемой точности статистического эксперимента, этапы 1–3 повторяются  $N$  раз. Для получения приемлемых результатов  $N$  должно составлять не менее 500.

Более точно определить значение  $N$  можно с использованием приближенной формулы:

$$N \geq \frac{9P(1-P)}{\delta^2}, \quad (4.62)$$

в которой  $P$  — вероятность обеспечения заданной точности моделирования, а  $\delta$  — точность моделирования. Из данного неравенства можно сделать вывод, что метод Монте-Карло для обеспечения высокой точности требует проведения множества экспериментов (до  $10^9$  и более). Например, чтобы обеспечить с вероятностью  $P=0,99$  точность моделирования  $\delta=0,01$  (1% максимального отклонения значения моделируемой величины), необходимо провести  $N=90\,000$  испытаний. При решении инженерных задач обычно выбирают  $\delta=0,01-0,05$ , что соответствует 1–5% максимального отклонения значения моделируемой величины. Иногда используют и другой критерий завершения экспериментальных исследований. Для этого в каждом эксперименте оценивают текущую дисперсию функции качества, а процесс моделирования завершают, когда относительное изменение дисперсии по сравнению со значением для предыдущего эксперимента окажется меньше заданной точности  $\varepsilon$ , т. е. при выполнении условия

$$\varepsilon \leq \left| \frac{D_i - D_{i-1}}{D_i} \right|,$$

где  $D_i$  — дисперсия, а  $i$  — номер вычислительного эксперимента.

5. По найденной совокупности реализаций внешних характеристик  $X_k$ ,  $k=1, m$  выполняется их статистическая обработка, т. е. рассчитываются математическое ожидание, дисперсия, размах варьирования параметров и их доверительные интервалы, границы полей допусков и др.

6. По полученной совокупности реализаций функции качества  $F_k$ ,  $k=1, m$  строятся гистограммы распределения.

Таким образом, сущность метода Монте-Карло состоит в математическом моделировании случайных величин или процессов с заданными вероятностными характери-

стиками и многократным вычислением исследуемого параметра по заданной аналитической модели объекта.

Наибольшую сложность при практической реализации метода Монте-Карло представляют пятый и шестой этапы, поэтому рассмотрим некоторые аспекты анализа статистически накопленных данных.

Необходимо отметить, что все методы анализа данных основаны на выборках. Выборка — часть данных, полученных из общей, так называемой генеральной совокупности. Если выборка хорошо представляет генеральную совокупность, то ее называют представительной (репрезентативной). Следовательно, целью статистических методов является обработка неких данных, содержащихся в информационном сообщении в виде числового массива, например

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.63)$$

где  $n$  — размерность массива.

В предположении, что массив (4.63) представляет собой выборку объемом  $n$  для некоторой случайной величины  $X$ , производится оценка всех числовых характеристик этой величины. Наиболее важными числовыми характеристиками случайной величины (СВ) являются следующие:

- характеристики центра распределения СВ (среднее значение, медиана и мода);
- характеристики рассеивания СВ около ее математического ожидания (дисперсия, среднее квадратичное отклонение, размах варьирования, среднее линейное отклонение от математического ожидания, коэффициенты вариации и осцилляции);
- характеристика асимметрии распределения и его эксцесса.

Рассмотрим их более подробно.

Среднее значение или оценка математического ожидания вычисляется по формуле среднего арифметического:

$$\bar{X} = \hat{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Заметим, что оценка математического ожидания дискретной СВ может вычисляться как сумма произведений всех возможных значений СВ на вероятности этих значений, т. е.

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

где  $p_i$  — вероятность  $i$ -го значения СВ.

Значение  $m_x$  характеризует как бы «центр тяжести» распределения СВ. Наряду с математическим ожиданием центр распределения определяют медиана и мода.

Медианой СВ называется такая величина  $Me_x$ , для которой с одинаковой вероятностью значение  $X$  может оказаться меньше  $Me_x$  и больше  $Me_x$ . Для расчета медианы массив (4.63) записывается в виде ранжированного ряда:

$$(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p), \quad (4.64)$$

в котором значения  $x_i$  расставлены в порядке возрастания или убывания, как в качестве примера показано в таблице 4.22.

Таблица 4.22

Пример ранжированного ряда

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i$	3	1	2	5	8	7	4	3	3	9	7	10
$x_j^p$	1	2	3	3	3	4	5	7	7	8	9	10

В случае, если  $n$  — четное число, медиана равна

$$\hat{Me}_x = \frac{1}{2} \left( x_{\frac{n}{2}}^p + x_{\frac{n}{2}+1}^p \right),$$

а при нечетном  $n$

$$\hat{Me}_x = x_{\frac{n+1}{2}}^p.$$

В нашем примере  $n=12$ , тогда

$$\hat{Me}_x = \frac{1}{2} \left( x_{\frac{12}{2}}^p + x_{\frac{12}{2}+1}^p \right) = \frac{4+5}{2} = 4,5.$$

При малом  $n$  медиана наиболее устойчиво характеризует центр распределения СВ  $X$ .

Модой  $Mo_x$  называется наиболее вероятное значение СВ. В качестве оценки моды в ранжированном ряду (4.64) берется значение  $x_i^p$ , которое повторяется большее число раз (имеет большую частоту). Тогда для данных, приведенных в таблице 4.22,  $\hat{Mo}_x = 3$ . Распределение СВ может характеризоваться несколькими модами, такое распределение называют полимодальным. Применительно к данным таблицы 4.22 можно указать второе значение моды  $\hat{Mo}_x = 7$ . Если массив (4.63) не содержит повторяющихся значений, то значение моды оценивается после построения гистограммы.

Основной характеристикой рассеивания значений СВ около ее математического ожидания является дисперсия.

Дисперсией СВ  $X$  называется математическое ожидание квадрата центрированной величины. Центрированная случайная величина  $\dot{x}$  получается из исходной  $X$  вычитанием ее математического ожидания  $m_x$ , поэтому  $\dot{x}$  имеет нулевое математическое ожидание. Дисперсия имеет размерность квадрата СВ и рассчитывается по формуле

$$\hat{D}_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_x)^2.$$

Непосредственно с дисперсией связана другая характеристика рассеивания СВ — среднее квадратичное отклонение, определяемое по формуле  $\sigma_x = \sqrt{\hat{D}_x}$ .

Рассеивание значений  $X$  характеризуется также размахом варьирования  $\hat{R} = x_{\max} - x_{\min}$  и средним линейным отклонением от  $m_x$   $\hat{d}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - m_x|$ .

Для оценки рассеивания относительно среднего  $m_x$  используют выражаемые в процентах коэффициенты вариации  $\hat{v} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\hat{m}_x} 100\%$  и осцилляции  $\hat{V}_R = \frac{\hat{R}}{\hat{m}_x} 100\%$ .

В качестве числовой характеристики асимметрии распределения СВ применяется коэффициент асимметрии, определяемый по формуле

$$\hat{A}_s = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}_x^3},$$

где  $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_x)^3$  — оценка третьего центрального момента СВ.

Если  $\hat{A}_s > 0$ , то имеет место положительная или правосторонняя асимметрия, если  $\hat{A}_s < 0$ , то отрицательная или левосторонняя (рис. 4.12а).

Остро- или плосковершинное распределение СВ оценивается с помощью числовой характеристики, называемой эксцессом и рассчитываемой по формуле

$$\hat{E}_k = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}_x^4} - 3,$$

где  $\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_x)^4$  — оценка четвертого центрального момента СВ.

В случае положительного эксцесса ( $\hat{E}_k > 0$ ) распределение имеет островершинный характер, при  $\hat{E}_k < 0$  — плосковершинный (рис. 4.12б).

Наиболее часто в качестве полных характеристик распределения СВ используются эмпирическая функция распределения и эмпирическая плотность распределе-

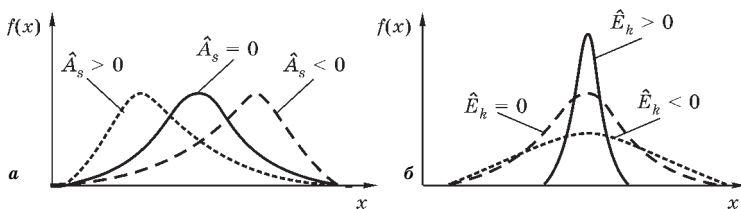


Рис. 4.12

Распределение случайной величины:

а — с различной асимметрией; б — с различным эксцессом.



ния, обычно представляемая столбчатой диаграммой — гистограммой.

В качестве исходных данных рассматривается информационное сообщение, представляющее собой одномерный числовой массив вида (4.63). Рассмотрим построение эмпирической функции распределения  $\hat{F}(x)$  и гистограммы  $\hat{f}(x)$  для массива данных, значения элементов которого приведены в таблице 4.22.

Для построения функции  $\hat{F}(x)$  составляют таблицу 4.23, содержащую значения СВ  $X_j$  в массиве (4.63) в виде возрастающего ряда и их частот:

$$p_j = \frac{m_j}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n_1,$$

где  $m_j$  — число данных  $x_i$ , равных значению  $X_j$ ;  $n_1 \leq n$  — число различных значений СВ  $X$ ,  $n$  — объем выборки.

Из таблицы 4.23 видно, что  $n_1 = 9$  (всего данных  $n = 12$ ), первое значение  $X_1 = 1$  содержится в выборке один раз, т. е.  $m_1 = 1$  и  $p_1 \approx 0,083$  соответственно. Аналогично для  $X_2 = 2$   $m_2 = 1$  и  $p_2 \approx 0,083$ , а  $X_3 = 3$  содержится в выборке три раза, поэтому  $m_3 = 3$ ,  $p_3 \approx 0,25$  и т. д.

Эмпирическая функция распределения по данным таблицы 4.23 строится следующим образом (рис. 4.13). Наименьшее значение  $X$  в выборке  $X_1 = 1$ , поэтому до значения 1  $\hat{F}(x) = 0$ . Так как  $X_1 = 1$  наблюдалось один раз ( $m_1 = 1$ ) и его частота  $p_1 = 1/12 \approx 0,083$ , то в точке  $X_1 = 1$  функция  $\hat{F}(x)$  скачком изменяется на величину  $p_1 \approx 0,083$ . В промежутке от 1 до 2  $\hat{F}(x) = 0,083$ . Следующий скачок она делает в точке  $X_2 = 2$  и увеличивается на величину  $p_2 \approx 0,083$  соответственно. На интервале от 2 до 3  $\hat{F}(x) = 0,167$ .

Таблица 4.23

Упорядоченный ряд значений СВ и их частот

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значения $X_j$	1	2	3	4	5	7	8	9	10
$m_j$	1	1	3	1	1	2	1	1	1
$p_j$	0,083	0,083	0,25	0,083	0,083	0,166	0,083	0,083	0,083
$F(x)$	0,083	0,167	0,417	0,5	0,583	0,75	0,833	0,917	1,0

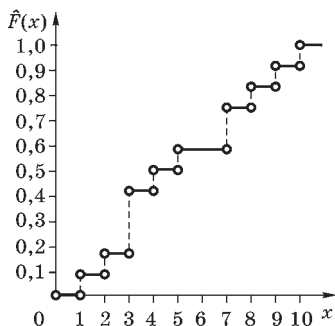


Рис. 4.13  
Эмпирическая функция  
распределения СВ

В точке  $X_3=3$  величина скачка равна  $p_3 \approx 0,25$  и т. д. Последний скачок происходит в точке  $X_9=10$  и при  $x > X_9$  эмпирическая функция  $\hat{F}(x)$  принимает единичное значение.

Функцию  $\hat{F}(x)$  удобно использовать для решения задач, связанных с определением вероятностей того, что СВ  $X$  примет значение в некотором интервале.

Например, необходимо определить вероятность того, что СВ  $X$  будет иметь значение в интервале  $[0; 3]$ . Для полученной эмпирической функции эта вероятность равна разности  $\hat{F}(3) - \hat{F}(0) \approx 0,42$  (рис. 4.13).

Построение гистограммы, или эмпирической плотности распределения  $\hat{f}(x)$ , непрерывных СВ связано с группированием выборочных данных по интервалам (разрядам), на которые разбивается весь диапазон значений СВ. Обычно интервалы берутся одинаковыми по величине. Величину (ширину) интервала  $d$  и число интервалов  $k$  при достаточном объеме выборки  $n$  обычно определяют с помощью выражения

$$d = \frac{R}{1+k},$$

где  $R$  — размах варьирования, а число интервалов  $k$  определяется по формуле Г. Стерджесса:

$$k = 1 + 3,322 \lg n.$$

После определения числа интервалов и значений границ интервалов заполняется таблица, в первой и второй строках которой указывают соответственно номера интервалов и значения их границ. Покажем заполнение таблицы 4.24 для гистограммы на примере данных (см. табл. 4.22) в предположении, что это непрерывная случайная величина.

Возьмем интервал изменения СВ  $X$  от 0 до 11, пусть  $k=4$  и  $d=2,75$ . Таблица 4.24 имеет следующий вид.

Таблица 4.24

## Группирование данных по интервалам

Номера интервалов	1	2	3	4
Значения границ интервалов, $d_j$	0; 2,75	2,75; 5,5	5,5; 8,25	8,25; 11
Число наблюдений в интервале, $h_j$	2	5	3	2
Относительная частота, $\hat{p}_j$	0,167	0,417	0,25	0,167
Значение $\hat{f}_j$	0,061	0,152	0,091	0,061

Заполнение таблицы 4.24 ведется по следующим правилам. Так как в первый интервал  $[0; 2,75]$  попадают значения  $x_1^p = 1$  и  $x_2^p = 2$  ранжированного ряда (см. третью строку таблицы 4.22), то в третьей строке таблицы 4.24  $h_1=2$ . Поскольку на второй интервал  $[2,75; 5,5]$  приходятся значения  $x_3^p = x_4^p = x_5^p = 3$ ;  $x_6^p = 4$  и  $x_7^p = 5$ , то  $h_2=5$  в третьей строке таблицы 4.24. Аналогично находятся  $h_3$  и  $h_4$ . Необходимо отметить, что если значение  $x_j^p$  будет расположено на границе между интервалами, то его делят между интервалами (0,5 значения принадлежит левому интервалу и 0,5 — правому).

В четвертой строке таблицы 4.24 расположены относительные частоты, определяемые по формуле

$$\hat{p}_j = \frac{h_j}{n}, \quad j = \overline{1, k}.$$

В последней строке таблицы 4.24 приведены значения высот столбиков гистограммы, получаемые делением значений  $\hat{p}_j$  на величину интервала  $d$ , т. е.

$$\hat{f}_j = \frac{p_j}{d_j}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Правильность расчетов проверяется выполнением условий:

$$\sum_{j=1}^k \hat{p}_j = 1 \quad \text{и} \quad d \sum_{j=1}^k \hat{f}_j = 1.$$

Рассчитанная гистограмма показана на рисунке 4.14.

По виду гистограммы делаются предположения о возможном законе распределения СВ, а также отмечается, насколько соответствуют оценки асимметрии и эксцесса виду эмпирической плотности вероятности.

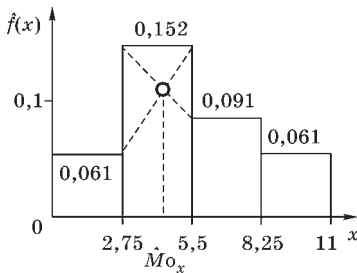


Рис. 4.14  
Гистограмма

С помощью визуального сравнения полученной гистограммы  $\hat{f}(x)$  с теоретической кривой плотности вероятности  $f(x)$ , а также учитывая знаки эксцесса и асимметрии, можно сделать предположение о воз-

можном законе распределения СВ с выборочными данными (4.63). По гистограмме можно также оценить моду  $\hat{M}_0_x$  непрерывной СВ при отсутствии повторяющихся значений  $x_i$ . Для этого берется наиболее высокий столбик гистограммы и для него проводятся построения, показанные на рисунке 4.14.

В качестве примера рассмотрим практическое применение метода Монте-Карло для оценки точности выходных параметров ЭС. В общем случае выходной параметр  $U$  разрабатываемого средства является функцией входной величины  $A$ ; параметров комплектующих элементов  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , внешних возмущающих воздействий  $\varphi_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , т. е.

$$U = F(A, \xi_i, \varphi_j). \quad (4.65)$$

Нахождение функции является первым этапом любого моделирования и требует изучения исходного объекта, влияющих на него факторов и их взаимосвязей. Параметры комплектующих элементов задаются как определенные номинальные значения с некоторым разбросом, например  $\xi_1 = 100 \text{ кОм} \pm 5\%$ . Аналогичным образом задаются значения внешних факторов (например, напряжение питания  $\varphi_1 = 12 \text{ В} \pm 10\%$ ). Поскольку каждая из величин подчиняется своему закону распределения, а между ними

могут иметь место корреляционные связи, то определение закона распределения и доверительного интервала для входного параметра осуществляется с применением вероятностно-статистического аппарата.

Методика расчета достаточно проста. Вначале определяются вероятностные модели параметров величин, которые затем используются для определения величины  $U_k$  по формуле (4.65) при неизменной входной величине  $A$ . Повторяя эту процедуру  $N$  раз, формируется массив параметров  $U_1, U_2, \dots, U_N$ , являющихся случайными величинами, по которым оценивается закон распределения параметра  $U$  и его числовые характеристики. Затем производят обработку результатов эксперимента и получают математическое ожидание  $m_U$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma_U$ , которое и характеризует точность выходного параметра.

Получение вероятностных моделей проводится на основе метода Монте-Карло следующим образом. В качестве исходных данных используются: математическая модель вида (4.65), параметры элементов и закон распределения  $P(\xi_i)$  их параметров.

Предполагая закон распределения параметров элементов нормальным, с вероятностью  $P=0,997$  получим

$$\bar{X} = \hat{m}_x; \quad x^{(-)} = \hat{m}_x - 3\hat{\sigma}_x; \quad x^{(+)} = \hat{m}_x + 3\hat{\sigma}_x,$$

где  $\bar{X}$  — номинальное (среднее) значение параметра элемента;  $x^{(-)}$ ,  $x^{(+)}$  — максимальные верхнее и нижнее отклонения параметра элемента;  $x$  — значение параметра элемента в реальных условиях;  $\hat{m}_x$  — математическое ожидание  $x$ ;  $\hat{\sigma}_x$  — средняя квадратичная погрешность  $x$ .

На основании центральной предельной теоремы теории вероятностей  $x$  можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad (4.66)$$

где  $\xi$  — случайная величина, равномерно распределенная на некотором отрезке  $[a; b]$ . Поскольку она распределена равномерно, то ее можно представить в виде

$$\xi = a + \eta(b - a), \quad (4.67)$$

где  $\eta$  — случайное число, равномерно распределенное на отрезке  $[0; 1]$ .

Величины  $a$  и  $b$  определяют из следующих соображений. Пусть  $x$  принимает минимально возможное значение:

$$x \rightarrow \min \Rightarrow X^{(-)} = \bar{X} - 3\sigma_x.$$

Это возможно в случае, когда каждое слагаемое (4.66) принимает минимальное значение:

$$\xi = a + \eta(b - a) \rightarrow \min: \eta \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow a.$$

Отсюда получаем

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i \rightarrow \min \Rightarrow \bar{X} - 3\sigma_x = \sum_{i=1}^n a = na \Rightarrow a = \frac{\bar{X}}{n} - 3\frac{\sigma_x}{n}. \quad (4.68)$$

Аналогично

$$x \rightarrow \max \Rightarrow X^{(+)} = \bar{X} + 3\sigma_x;$$

$$\xi = a + \eta(b - a) \rightarrow \max: \eta \rightarrow 1 \Rightarrow \xi \rightarrow b$$

и

$$\bar{X} + 3\sigma_x = \sum_{i=1}^n b = nb \Rightarrow b = \frac{\bar{X}}{n} + 3\frac{\sigma_x}{n}. \quad (4.69)$$

Алгоритм расчета состоит из следующих этапов.

1. Вычисляется выходной параметр схемы по номинальным значениям параметров элементов по формуле (4.65).

2. Определяется требуемое число реализаций  $N$  при  $\delta=0,05$  и  $P=0,95$  по выражению (4.62).

3. Генерируется случайное число  $\eta$ , равномерно распределенное на отрезке  $[0; 1]$ .

4. По формуле (4.67) генерируется случайная величина  $\xi$ , при этом  $a$  и  $b$  вычисляются по (4.68) и (4.69) с учетом того, что  $3\sigma_x$  соответствует указанному отклонению от номинального значения параметра применяемого элемента.

5. Определяется параметр  $x$  элемента по формуле (4.66).

6. Этапы 3–5 выполняются для всех элементов схемы  $N$  раз.

7. Вычисляются значения выходного параметра по формуле (4.65).

9. Определяются математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение по формулам:

$$m_U = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N U_k; \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (U_k - m_U)^2}.$$

В заключение следует отметить, что при программной реализации метода Монте-Карло для допускового анализа и синтеза, а также алгоритмов статистической оптимизации требуется генерация последовательности случайных чисел с заданным законом распределения. Известны три способа генерации случайных чисел: с помощью физических датчиков, табличный и программный [6]. Характерной особенностью САПР является использование в этих целях программного способа, так как первый способ не обеспечивает необходимой стабильности результата, а второй требует слишком большого объема машинной памяти. Полученные программным способом числа в сущности являются псевдослучайными, поскольку, задав конкретное число, всегда можно повторить всю последовательность. Поэтому наиболее важной характеристикой программного генератора случайных чисел является интервал аperiodичности, т. е. длина последовательности не повторяющихся случайных чисел. Чем больше интервал аperiodичности, тем выше качество генерации.

#### 4.3.5. Методы анализа сигналов

Любой реальный периодический сигнал представляет собой сумму нескольких гармоник и, следовательно, является сложным сигналом. Под сложным сигналом понимают любой периодический сигнал несинусоидальной формы, например прямоугольный или треугольный. В методах анализа сложных сигналов удобно использовать теорию специальных рядов, разработан-

ную в 1826 г. французским физиком и математиком Б. Д. Фурье.

Анализ Фурье — это метод математического описания сигналов, позволяющий переходить от временной области их рассмотрения к частотной и обратно (см. § 3.3.2). Для этого используется ряд Фурье, представляющий собой разложение несинусоидальной периодической функции на синусоидальные компоненты. Следовательно, любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы членов ряда Фурье:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (4.70)$$

в котором для периода сигнала  $T$  коэффициенты ряда принимают значения:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \cos n\omega t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \sin n\omega t dt.$$

В этих формулах величина  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота, выражаемая в рад/с;  $f$  — основная частота сигнала, Гц.

Из выражения (4.70) видно, что разложение сигнала  $U(t)$  в ряд Фурье включает постоянную составляющую  $U_0$ , равную среднему значению сигнала, и сумму функций синуса и косинуса, при этом каждое очередное слагаемое имеет частоту, кратную целому числу первой синусоидальной или косинусоидальной составляющей, соответствующую порядковому номеру члена ряда, т. е. уравнение (4.70) можно трактовать следующим образом: любой периодический сигнал равен сумме постоянной составляющей и ряда гармонических — синусоидальных и косинусоидальных — составляющих сигнала.

Частоту, кратную основной частоте сигнала (минимальной частоте, необходимой для представления сигнала), называют гармоникой. Основная гармоника — это первая гармоника, равная частоте повторения формы сигнала. Следующий член ряда, имеющий удвоенную частоту по сравнению с основной гармоникой, называется второй гармоникой, следующий — третьей и т. д. Поэтому



уравнение (4.70) с точки зрения анализа сигналов можно записать в виде

$$U(t) = \text{постоянная составляющая} + \\ \text{основная гармоника} + 2\text{-я гармоника} + \\ + 3\text{-я гармоника} + \dots + n\text{-я гармоника.}$$

Если форма периодической функции симметрична относительно вертикальной оси, то она имеет осевую или зеркальную симметрию, а саму функцию называют четной. Для всех четных функций коэффициенты  $b_n$  в уравнении (4.70) равны нулю, т. е. сигнал содержит постоянную и косинусоидальные составляющие. Четные функции удовлетворяют условию  $U(t) = U(-t)$ , т. е. значение и знак функции в точке  $t$  равны ее значению и знаку в точке  $-t$ . Форма сигнала, содержащего только четные функции, показана на рисунке 4.15а.

Если форма периодической функции симметрична относительно асимптоты второго и четвертого квадранта, то она имеет центральную симметрию, а саму функцию называют нечетной. Для всех нечетных функций коэффициенты  $a_n$  в уравнении (4.70) равны нулю, т. е. сигнал содержит постоянную и синусоидальные составляющие. Нечетные функции удовлетворяют условию  $U(t) = -U(-t)$ , поэтому значение функции в точке  $t$  равно по величине, но противоположно по знаку в точке  $-t$ . Периодический сигнал, содержащий только нечетные функции, показан на рисунке 4.15б.

Если у периодической функции форма первого полу-периода (от  $t=0$  до  $t=T/2$ ) полностью повторяет форму

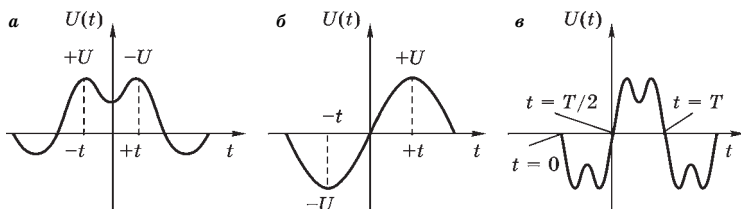


Рис. 4.15

Виды симметрии сигналов:

а — четная; б — нечетная; в — полупериодическая.

второго (от  $t=T/2$  до  $t=T$ ), только с противоположным знаком, то такая функция обладает полупериодической симметрией. Для всех сигналов с полупериодической симметрией четные гармоники синусоидальных и косинусоидальных составляющих равны нулю. Полупериодические функции удовлетворяют условию  $U(t)=-U(T+t)/2$ . График функции, имеющей полупериодическую симметрию, показан на рисунке 4.15в.

В качестве примера рассмотрим методику определения амплитуды и частот первых пяти нечетных гармоник для последовательности прямоугольных импульсов, показанных на рисунке 4.16а [17].

Анализ графика рисунка 4.16а показал, что постоянная составляющая этого сигнала равна нулю, а его форма имеет признаки нечетной симметрии. Решив уравнение (4.70), получаем следующий ряд Фурье для данного прямоугольного сигнала:

$$U(t) = U_0 + 4 \frac{U}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \frac{1}{9} \sin 9\omega t + \dots + \frac{1}{n} \sin n\omega t \right), \quad (4.71)$$

где  $U_0$  — постоянная составляющая сигнала, В;  $U$  — амплитуда прямоугольного сигнала, В;  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота, рад/с;  $f = 1/T$  — основная частота прямоугольного сигнала, Гц;  $T$  — период сигнала, с.

Как видно из рисунка 4.16а, основная частота исходного сигнала  $f = 1/10^{-3} = 1000$  Гц.

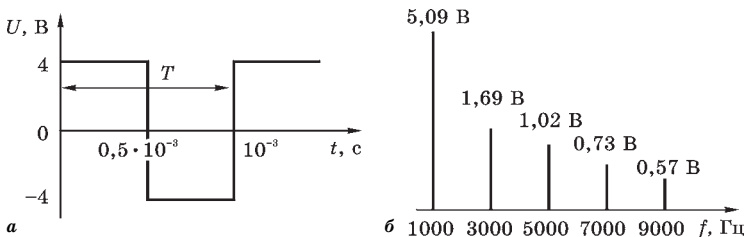


Рис. 4.16

Исходный прямоугольный сигнал:

а — временное представление; б — частотное представление.

Согласно уравнению (4.71) частоту и амплитуду  $n$ -й нечетной гармоники можно определить следующим образом:

$$f_n = nf; \quad (4.72)$$

$$U_n = \frac{4U}{n\pi}, \quad (4.73)$$

где  $n$  — номер нечетной гармоники.

Подставив  $n=1$  в (4.72) и (4.73), получим  $f_1=1000$  Гц, а  $U_1 = \frac{4(4)}{\pi} \approx 5,09$  В.

Аналогичным образом определяются частоты для 3, 5, 7 и 9-й гармоник:  $f_3=3000$ ,  $f_5=5000$ ,  $f_7=7000$ ,  $f_9=9000$  Гц и их амплитуды:  $U_3=1,69$ ,  $U_5=1,02$ ,  $U_7=0,73$ ,  $U_9=0,57$  В соответственно. Частотный спектр сигнала показан на рисунке 4.16б.

Подставляя полученные результаты в (4.71), получим

$$U(t) = 5,09\sin(2\pi 1000t) + 1,69\sin(2\pi 3000t) + 1,02\sin(2\pi 5000t) + 0,73\sin(2\pi 7000t) + 0,57\sin(2\pi 9000t).$$

Результаты расчетов значений  $U(t)$  для различных моментов времени  $t$  сведены в таблицу 4.25 и использованы при аналитическом моделировании сигнала (рис. 4.17).

Таблица 4.25

Результаты расчетов значений  $U(t)$

$t$ , мкс	0	62,5	125	250	375	437,5	500
$U(t)$ , В	0	4,51	3,96	4,26	3,96	4,51	0
$t$ , мкс	562,5	625	750	875	937,5	1000	1062,5
$U(t)$ , В	-4,51	-3,96	-4,26	-3,96	-4,51	0	4,51

Как видно из рисунка 4.17, форма построенного графика не в точности соответствует прямоугольному сигналу, но близка к нему. Для достижения более точной формы требуется найти значения  $U(t)$  для большего числа гармоник, чем это было выполнено в рассматриваемом примере.

Многие сигналы в системах связи нельзя однозначно описать математическими выражениями, однако их поведение в частотной области может представлять

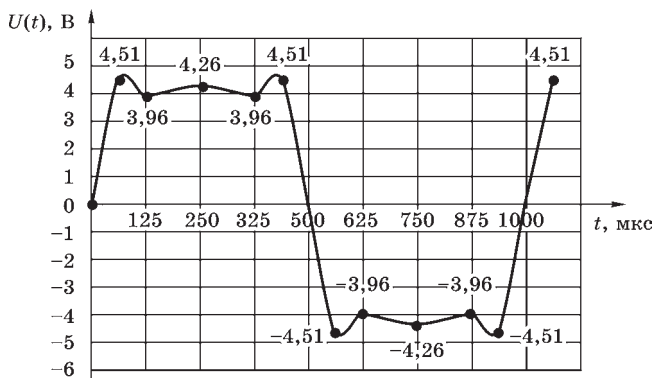


Рис. 4.17

Временное представление прямоугольного сигнала

большой интерес. Очень часто необходимо оперативно получать частотное представление сигнала по мере его изменения, т. е. в реальном времени [17]. Это послужило причиной разработки дискретного преобразования Фурье, при котором уровень сигнала фиксируется через заданные промежутки времени, а затем полученные отсчеты вводятся в ЭВМ, где по определенному алгоритму рассчитываются составляющие частотного спектра. Недостаток таких алгоритмов — слишком высокие затраты машинного времени, поскольку время вычисления пропорционально  $n^2$ , где  $n$  — шаг дискретизации. Поэтому в 1965 г. американскими учеными Д. Кули и Д. Тьюки был создан новый алгоритм, который был лишен отмеченного недостатка и получил название быстрого преобразования Фурье, или алгоритма Кули — Тьюки. Особенность этого алгоритма состоит в том, что время вычисления пропорционально  $n \log_2 n$ , а не  $n^2$ . В настоящее время алгоритмы Кули — Тьюки содержатся практически во многих прикладных программах для научных и инженерных вычислений, таких как *MATLAB* (библиотека *Signal Processing Toolbox*), *Mathcad* (пакет расширения *Signal Processing Extension Pack*), *Maple* (с пакетом расширения *MATLAB*) и др.

#### 4.4. ЗАДАЧИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Технологическая подготовка производства обычно рассматривается как совокупность современных методов организации, управления и решения технологических задач на основе комплексной стандартизации, автоматизации, математико-экономических моделей и средств технологического оснащения. Стандарты Единой системы технологической подготовки производства (ЕСТПП) устанавливают общие правила организации и управления производством, предусматривают широкое применение прогрессивных технологических процессов (ТП), стандартной технологической оснастки, средств комплексной механизации и автоматизации производственных процессов и управленческих работ [36].

Поэтому основными задачами, решаемыми при проектировании технологических процессов производства ЭС являются: выбор технологий и технологических маршрутов для компонентов изделия, разработка принципиальной схемы ТП в виде последовательности этапов укрупненных операций, выбор технологического оборудования, оснастки и инструментов, оптимизация технологических маршрутов и операций, проектирование систем автоматического контроля и управления технологическими процессами, разработка системы менеджмента качества, оценка экономической эффективности ТП [6].

Большое внимание при решении этих задач уделяется не только аспектам производственной реализации ЭС, которые обеспечили бы пригодность изделия надежно выполнять свои функции в условиях его будущей эксплуатации, но и проблемам, связанным с эффективностью использования энергетических ресурсов при производстве изделия и экологическими требованиями. Для решения задач проектирования ТП широко используются методы математического моделирования, оптимизации и планирования эксперимента.

Построение математических моделей предполагает определение целей моделирования, декомпозицию ТП на отдельные операции, построение математических

моделей для каждой операции, верификацию полученных моделей и их композицию в обобщенную модель всего технологического процесса. Разработанные модели используются в САПР ТП и SCADA-системах.

В качестве моделей ТП наиболее часто используются описательные (вербальные), аналитические и графовые, различные виды которых достаточно подробно рассматриваются в третьей главе учебного пособия.

Описательные модели обычно представляют собой таблицы с информацией о режимах работы, технологических операциях, переходах и т. п. Эти таблицы содержатся в базах данных САПР ТП.

Аналитические модели ТП характеризуют функциональные связи между входными и выходными переменными ТП, отражают физико-химические процессы в технологических установках. Такие модели необходимы для решения задач оптимизации режимных параметров ТП, анализа чувствительности выходных показателей ТП в случае различного рода отклонений от требуемого регламента и др.

Графовые модели в виде неориентированных и ориентированных графов, отражающих взаимозависимости между переменными ТП, применяются для решения задач надежности, планирования загрузки технологического оборудования, управления запасами и т. п.

Моделирование ТП во многих случаях тесно связано с моделированием проектируемых и изготавливаемых объектов. Например, при моделировании этапов технологии изготовления интегральных схем необходимо учитывать характеристики (статические, динамические) и компоненты (активные, пассивные), которые описываются моделями самих интегральных схем.

Особенностями задач оптимизации применительно к технологической подготовке производства являются широкое разнообразие постановок задач, сложность их формализации, высокая размерность массивов переменных, участвующих в задаче, наличие различного рода ограничений и неопределенностей в исходных данных, большое число возможных вариантов построения ТП, отсутствие единого подхода к решению задач.

Если проект связан с незначительной модернизацией ЭС, то существенная часть технологических операций считается отработанной, а для отдельных операций требуется уточнение технологических режимов и используемых материалов. В случае значительной модернизации изделия при формировании вариантов ТП могут использоваться аналогичные процессы с учетом необходимой коррекции.

Наиболее распространенные методы решения задач оптимизации, принятия проектных и управленческих решений в различных ситуациях изложены в разделе 4.2 настоящего пособия. При использовании этих методов необходимо руководствоваться соответствующими положениями и принципами проектирования ТП. При автоматизации технологической подготовки производства ЭС наиболее важными являются принципы иерархичности, неокончателности и итерационности [15].

Согласно принципу иерархичности работы по проектированию ТП делятся по уровням таким образом, что решения задач, получаемых на одних уровнях, служат исходными данными для задач следующих уровней.

Принцип неокончателности решений на этапах технологической подготовки производства предполагает, что после выполнения каждого этапа для последующего проектирования остается не один, а несколько альтернативных вариантов проектных решений. Это повышает обоснованность получения наиболее предпочтительной схемы ТП.

Принцип итерационности заключается в возможности возврата от каждого этапа проектирования к любым предыдущим. Это позволяет использовать новую информацию, полученную в ходе выполнения работ технологического проектирования и анализа результатов экспериментальной проверки качества технологического процесса.

Важное значение при проектировании ТП имеет решение задачи оценки качества тех или иных технологических операций, поскольку от качества ТП непосредственно зависят технические и эксплуатационные характеристики производимого продукта в целом. Поэтому рассмотрим некоторые методы, посвященные анализу и контролю качества ТП более подробно.

#### 4.4.1. Методы анализа качества технологических процессов

Проведение анализа качества технологических процессов начинается с выбора информативных показателей качества, который требует проведения структурного анализа технологического процесса и определения точек контроля. Контролируемые параметры необходимо классифицировать и упорядочить по их важности для технологического процесса по критерию ценности информации, и провести их анализ. Следует заметить, что контролируемые параметры могут характеризовать отдельную операцию, аппаратно-процессную единицу (АПЕ), часть процесса или технологический процесс в целом. Здесь под АПЕ понимается любой основной аппарат в технологической цепочке, в процессе работы которого производится изменение состояния или структуры полуфабриката изделия [37].

В качестве примера на рисунке 4.18 представлена обобщенная структурная схема формирования выходных параметров ЭС для технологического процесса его изготовления.

На входе технологического процесса имеются исходное сырье, заготовки, материалы комплектующие, параметры которых можно разделить на геометрические параметры, определяющие размеры и качество поверхности, физико-химические параметры, определяющие твердость, упругость, микроструктуру, текучесть, прочностные и магнитные свойства, электропроводность и т. п., а также химические параметры, характеризующие состав исходного сырья.

Каждая группа параметров изменяется качественно и количественно в ходе технологического процесса с помощью АПЕ, состав и количество которых определяются характером технологического процесса и масштабами производства. Каждая АПЕ преобразует геометрические, электрофизические и химические параметры исходного материала, заготовок, полуфабрикатов в геометрические параметры деталей. Например, диаметр и длина поковки преобразуются в размеры отдельных





Рис. 4.18

Структурная схема формирования выходных параметров ЭС

деталей; физико-механические параметры заготовок — в физико-механические параметры деталей; химический состав исходного сырья определяет химический состав материала и т. д. Изменения всех этих параметров описываются определенными законами распределения. Совокупность законов распределения параметров определяет выходные функциональные характеристики деталей, их точность и надежность, а следовательно, и качество в целом.

Технологический процесс, состоящий из операций, выполняемых соответствующими АПЕ, можно охарактеризовать четырьмя большими группами факторов для заготовительных, обрабатывающих, сборочных и испытательных операций соответственно [37].

К первой группе относятся входные контролируемые и управляемые параметры  $X_3=\{x_{i3}\}$ ,  $X_0=\{x_{i0}\}$ ,  $X_C=\{x_{ic}\}$  и  $X_{И}=\{x_{in}\}$ ,  $i=1, k$ , призванные уменьшать погрешности технологического процесса и поддерживать заданные режимы, обеспечивая тем самым получение продукции требуемого уровня качества. Пределы изменения каждого из параметров определяются технологическим регламентом процесса, однако непосредственно при производстве задаются значением  $x_i$ , отвечающим условию  $x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}$ .

Вторая группа состоит из входных контролируемых, но неуправляемых параметров  $W_3=\{w_{i3}\}$ ,  $W_0=\{w_{i0}\}$ ,  $W_C=\{w_{ic}\}$ ,  $W_{И}=\{w_{in}\}$ ,  $i=1, l$ , пределы изменения которых определяются не только технологическим регламентом процесса, но и заданными допусками  $w_{i \min} \leq w_i \leq w_{i \max}$ .

К третьей группе относятся неконтролируемые и неуправляемые параметры качества исходных материалов, деталей и сборочных единиц технологических факторов процесса  $Z_3=\{z_{i3}\}$ ,  $Z_0=\{z_{i0}\}$ ,  $Z_C=\{z_{ic}\}$ ,  $Z_{И}=\{z_{in}\}$ ,  $i=1, m$ .

В состав четвертой группы включаются выходные показатели  $Y_3=\{y_{i3}\}$ ,  $Y_0=\{y_{i0}\}$ ,  $Y_C=\{y_{ic}\}$ ,  $Y_{И}=\{y_{in}\}$ ,  $i=1, n$ , несущие информацию о качестве полуфабрикатов, деталей и готовых изделий и удовлетворяющие установленным допускам  $y_{i \min} \leq y_i \leq y_{i \max}$ .

На рисунке 4.19 приведена упрощенная модель технологического процесса изготовления ЭС.

Необходимо заметить, что хотя задача выбора информативных параметров достаточно хорошо разработана

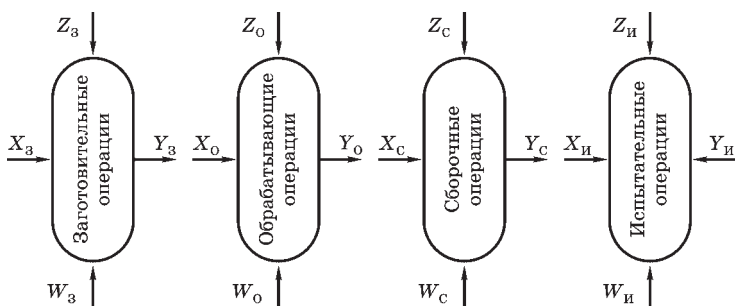


Рис. 4.19

Модель технологического процесса типа «черный ящик»

теоретически, на практике приходится сталкиваться со многими трудностями, поэтому от качества решения данной задачи напрямую зависит результат контроля качества технологического процесса.

Для анализа качества технологического процесса разрабатывают так называемую технологическую схему контроля качества, основанную на принципиальной или аппаратно-технологической схеме и дающую полную картину контроля качества технологического процесса [37].

В качестве примера на рисунке 4.20 приведен один из вариантов такой схемы, в которой указаны управляемые и контролируемые входные параметры  $\{x_i\}$ ,  $i = 1, k$ , выходные параметры полуфабрикатов, деталей или готового изделия  $\{y_i\}$ ,  $i = 1, n$  и управляющие сигналы  $\{\Delta x_i\}$ ,  $i = 1, k$ , выработанные системой на основании информации, полученной от пунктов контроля при измерении выходных параметров  $y_i$ .

В соответствии с рисунком 4.20, информация о параметрах управляющего процесса представляется в виде последовательности

$$\sum_{i=1}^k x_{i1}(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n y_{i1}(t) \rightarrow \dots \rightarrow \sum_{i=1}^n y_{iN}(t),$$

где  $t$  — текущее значение параметра, а стрелками указано направление формирования параметров изделия.

Следует заметить, что здесь учтены только управляемые входные факторы  $\{x_i\}$ . Однако на выходные параме-

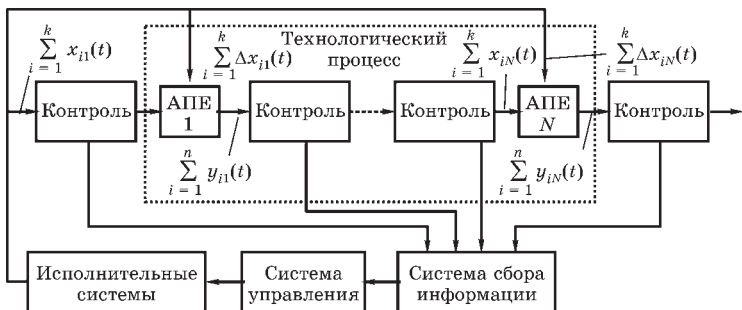


Рис. 4.20  
Технологическая схема контроля качества

тры оказывают влияние также неуправляемые факторы  $\{w_i\}$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Поэтому на основании текущих значений по крайней мере двух факторов  $x_i(t)$  и  $w_i(t)$  прогнозируется ожидаемое значение выходного параметра  $y_i(t)$ . Если значение  $y_i(t)$  не соответствует заданному, то вырабатывается управляющее воздействие  $\Delta x_i(t)$ . В зависимости от величины и знака управляющего сигнала осуществляется из-

менение входных параметров  $\sum_{i=1}^k x_{i1}(t)$  таким образом,

чтобы совокупность  $x_i(t)$  и  $w_i(t)$  определила значение  $y_i(t)$ , близкое к заданному  $y_i$ .

Информация о параметрах  $y_i$  воспринимается датчиками, преобразующими идентифицируемые величины в электрический сигнал необходимого вида. Следовательно, метод получения, обработки и отображения информации о качестве технологического процесса производства электронных средств подобен методам получения, преобразования, передачи и отображения информации, реализуемым в любых информационно-измерительных системах. Однако реализация такого метода применительно к технологии производства ЭС имеет следующие особенности [37]:

- трудности преобразования информационного сигнала в управляющий из-за отсутствия достаточных сведений о системе взаимодействия технологических факторов с выходными параметрами качества изделия;
- необходимость адаптации каждой системы контроля и управления к конкретному производству из-за различной структуры и состава информационных потоков, сигналов управления, а также соответствующего математического и аппаратного обеспечения.

Проведение анализа погрешностей параметров качества при изготовлении целого ряда ЭРИ, в первую очередь интегральных микросхем (ИМС), приводит к выводу, что для стабильного производства распределение этих погрешностей должно быть близко к нормальному закону. Между тем на практике иногда распределения погрешностей отличны от гауссовского закона.

Несмотря на практические трудности в получении гауссовских законов распределения производственных погрешностей, следует подчеркнуть, что во всех случаях отклонение распределений погрешностей параметров качества изделий от нормального закона служит отправной точкой к анализу процессов для отыскания причин отклонения.

Рекомендуется следующий порядок исследования технологического процесса с целью его анализа по критериям точности и стабильности [37].

1. Сбор статистического материала, представляющего собой совокупность наблюдений за параметром качества в течение определенного времени.

2. Обработка собранного материала для получения полных распределений погрешностей параметров качества и построения точностных диаграмм исследуемого процесса.

3. По виду полных распределений, точностных диаграмм и значениям статистических критериев сходимости эмпирических распределений с теоретическими принимается гипотеза о принадлежности исследуемого процесса к определенной схеме возникновения производственных погрешностей.

4. Путем анализа физико-технологической сущности исследуемого процесса и дополнительного эксперимента подтверждается принятая гипотеза и определяются факторы, действие которых и формирует схему возникновения погрешностей.

5. Даются рекомендации по изменению технологического процесса для повышения его точности и стабильности.

6. После выполнения разработанных рекомендаций в течение определенного срока производится сбор и обработка статистического материала для подтверждения эффективности реинжиниринга технологического процесса.

Приведем пример анализа технологического процесса изготовления тонкопленочных резисторов по критериям точности и стабильности [37].

Одним из распространенных видов брака в производстве гибридно-пленочных ИМС является отклонение сопротивлений тонкопленочных резисторов от номинала за пределы установленного поля допуска. В процессе предварительного исследования был собран статистический материал, представляющий собой совокупность значений сопротивлений тонкопленочных резисторов, измеренных после каждого цикла напыления в течение большого временного периода. Источником статистической информации служила одна из вакуумных установок технологического участка, а напыление в течение всего времени осуществлялось через один комплект биметаллических масок.

Совокупность тонкопленочных резисторов, полученных за один цикл напыления, может быть представлена мгновенным распределением погрешностей параметра качества (в данном случае — сопротивления резисторов).

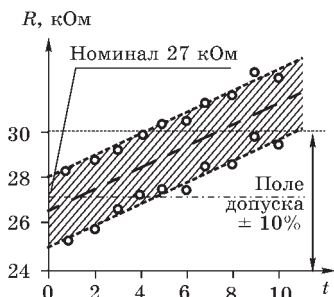


Рис. 4.21

Точностная диаграмма процесса напыления резисторов:

--- — изменение полей рассеивания ( $\pm 3\sigma$ ) погрешностей сопротивления резисторов; - - - — изменение центров группирования погрешностей сопротивления резисторов;  $t$  — номер цикла напыления.

Множество тонкопленочных резисторов, полученных за несколько циклов напыления, представляет полное распределение погрешностей параметра качества.

На основе обработанного статистического материала была построена эмпирическая точностная диаграмма исследуемого технологического процесса (рис. 4.21).

Из рассмотрения диаграммы следует, что, начиная с четвертого цикла напыления, поле рассеивания погрешностей сопротивления тонкопленочных резисторов выходит за пределы поля допуска, центры группирования погрешностей сопротивления тонкопленочных резисторов в мгновенных распределениях практически линейно растут во времени, а поле рассеивания

погрешностей сопротивления тонкопленочных резисторов в мгновенных распределениях не меняется во времени.

Также были построены и проверены по критерию Пирсона (хи-квадрат) эмпирическое полное распределение погрешностей сопротивления тонкопленочных резисторов (рис. 4.22). Проверка показала, что полное распределение по внешнему виду весьма напоминает комбинацию нормального закона с законом равной вероятности.

Следовательно, в данном случае имеется вполне определенная теоретическая схема возникновения погрешностей, а именно схема суммы, в которую, кроме большого числа случайных погрешностей, входит одна или несколько неслучайных.

Зная физическую сущность технологического процесса, можно сделать следующее заключение. Наличие неслучайных слагаемых погрешностей, значения которых меняются во времени, связано с систематической невоспроизводимостью линейных размеров тонкопленочных резисторов в процессе напыления от цикла к циклу.

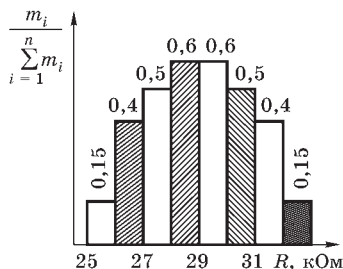


Рис. 4.22

Гистограмма полного распределения сопротивления резисторов:

$m_i$  — число резисторов в соответствующем интервале; — общее число резисторов.

#### 4.4.2. Методы и алгоритмы контроля качества технологических процессов

В соответствии с принципами менеджмента качества на этапе конструирования объекта закладывается определенный уровень его качества, а на этапе технологической подготовки производства осуществляется реализация этого уровня. Как и для любых других технических объектов, соответствие изготавливаемых ЭС необходимому уровню качества во многом зависит от полноты и достоверности информации, получаемой в результате

операционного контроля технологического процесса их изготовления.

Операционный контроль позволяет выявить брак уже на ранних стадиях изготовления ЭС, обеспечить устранение некоторых причин появления этого брака и тем самым обеспечить эффективность производственного процесса. При помощи операционного контроля выявляют отклонения режимов технологической операции, свойств исходных материалов, характеристик окружающей среды, определяют ошибки операторов и параметры настройки технологического оборудования.

По применяемым средствам операционный контроль подразделяется на измерительный, регистрационный (когда измерительные параметры регистрируются), органолептический контроль и технический осмотр.

Широкое применение в производстве ЭС находит органолептический контроль, при котором первичная информация воспринимается органами чувств человека. Органолептический контроль обеспечивает получение не представленной в числовом выражении информации. Решение относительно объекта контроля принимается в этом случае только по результатам анализа чувственных восприятий (например, по цветовым оттенкам, форме и цвету дефектов изделий и т. д.). При органолептическом контроле могут применяться средства контроля, не являющиеся измерительными, но увеличивающие разрешающую способность или восприимчивость органов чувств.

Органолептический контроль составляет большой объем при контроле качества ЭС. Трудоемкость операций органолептического контроля составляет около 25% от общей трудоемкости всех контрольных операций. Например, до 30% затрат на производство печатных плат приходится на органолептический контроль и при этом затрачивается до 30% общего технологического времени.

Органолептический контроль, осуществляемый органами зрения, называют визуальным контролем. В США визуально проверяется около 78% печатных плат. Одна-



ко достоверность визуального контроля, осуществляемая оператором, зависит от многих субъективных факторов и составляет 60–65% [37].

С ростом степени интеграции современных ЭС соответственно возрастают требования к визуальному контролю. Возникает необходимость осуществления 100%-ного визуального контроля с высокой степенью достоверности, что невозможно реализовать на практике без применения автоматизированных систем.

Все методы органолептического анализа оперируют с качественными показателями изделий и позволяют дать ответ на вопрос, годно изделие или нет. Однако для автоматизации визуального контроля необходимо качественные показатели оценить количественно. Для этого используются системы технического зрения (СТЗ). Идея использования автоматизированных систем визуального контроля качества продукции (в частности, печатных плат) возникла еще в 1960-е гг., однако только с широким распространением средств вычислительной техники стало возможным реальное внедрение в операционный контроль СТЗ, имеющих много преимуществ, как перед электронными средствами контроля, так и перед зрительной проверкой, выполняемой человеком [37], [38]. Это и возможность неконтактного считывания, высокое быстродействие и точность контроля; способность видеть в малых или ограниченных областях спектра и др.

Процессы операционного контроля в производстве ЭС характеризуются рядом особенностей [37]. К ним относятся:

- широкое многообразие применяемых методов и технических средств;
- рост относительной трудоемкости доли контрольных операций в общей трудоемкости технологического процесса изготовления ЭС;
- постепенная замена операций контроля продукции на контролирование технологических процессов.

Многообразие средств контроля вытекает из широкой номенклатуры объектов производства ЭС и роста

конструктивной сложности этих изделий. Объектами современного производства ЭС являются электронные модули различной конструктивной иерархии, в том числе пассивные и активные ЭРИ, разнообразные по назначению цифровые и аналоговые функциональные узлы и блоки, а также устройства СВЧ-диапазона. В производстве ЭС используется широкий набор различных комплектующих изделий, включая разнообразные ЭРИ — транзисторы, диоды, ИМС, конденсаторы, резисторы, коммутационные устройства и др. Современное производство ЭС — это производство, использующее различные варианты технологий создания полупроводниковых и пленочных ИМС, технологию печатного монтажа, технологии процессов сборки, включая процессы герметизации. Разнообразие конструктивно-технологических вариантов изделий ЭС требует применения в производстве широкой номенклатуры как методов контроля самих изделий, так и методов контроля технологии их изготовления.

При операционном контроле продукции применяют обширный спектр методов, как правило, неразрушающего контроля. Это оптические, рентгенографические, тепловые методы, методы электронной микроскопии, электрических измерений и т. д., которые используют, в частности, при операционном контроле технологических процессов изготовления печатных плат, микросхем и микросборок. Например, при операционном контроле технологического процесса изготовления изделий микроэлектроники широкое применение нашли тестовые схемы, состоящие из тестовых структур [37].

Тестовая структура представляет собой совокупность определенным образом спроектированных и соединенных элементов (резисторов, конденсаторов, транзисторов, проводников и т. д.), изготавливаемых совместно с реальными изделиями по анализируемому технологическому процессу и предназначенных для определения погрешностей формирования геометрических размеров и физических характеристик, а также характеристик дефектности физической структуры реального изделия.

Тестовая схема (ТС) представляет собой совокупность тестовых структур, число которых обеспечивает получение параметров распределений погрешностей формирования геометрических размеров, физических характеристик, характеристик привносимой дефектности с заданной точностью при определенной доверительной вероятности, а набор элементов адекватно отражает физическую структуру реального изделия, изготавливаемого по анализируемому технологическому процессу.

Статистические методы операционного контроля технологического процесса обеспечивают получение таких параметров процесса, как точность и стабильность, для оценки которых требуется статистически значимая информация. Поэтому методы, обеспечивающие получение такой информации, должны характеризоваться высокой производительностью измерения и обработки результатов. Этим требованиям отвечает метод статистического анализа технологического процесса, основанный на применении тестовых схем [37], [39]. ТС состоит из совокупности электронных компонентов, не входящих в состав рабочих элементов изделия, но размещенных совместно с ними и предназначенных для получения информации, обеспечивающей расчет характеристик качества технологического процесса или критерия годности реального изделия. Таким образом, специальная конструкция и определенная комбинация элементов, составляющих ТС, позволяют использовать ее в качестве инструмента получения нужной информации. Широкое применение ТС как источника информации о качестве изготовления изделий микроэлектроники обусловлено групповым характером обработки изделий на большинстве операций технологического процесса. Вследствие этого сильно коррелирована погрешность геометрических размеров на элементах ТС и элементах реальной схемы, изготовленных в одном цикле (в партии на подложке или в групповой партии). Высокая коррелированность погрешностей формирования геометрических размеров и дефектности при одновременном изготовлении тестовых схем и реальных изделий позволила использовать тестовые схемы для

получения информации о свойствах технологического процесса и одновременно о качестве изготавливаемых изделий. Так как тестовая схема проектируется специально для получения такой информации и имеет унифицированную для данного конструкторско-технологического варианта конструкцию, то процесс измерения и обработки результатов измерений производят с применением автоматизированных систем.

При проектировании ТС для анализа технологического процесса осуществляют:

- определение содержания и формы представления получаемой информации;
- выбор метода измерения параметров элементов ТС, измерительного оборудования и режима измерения;
- определение номенклатуры тестовых элементов;
- разработку конструкции каждого тестового элемента;
- определение числа однотипных элементов в ТС;
- выбор способа размещения и соединения элементов, геометрии и мест расположения контактных площадок.

При проектировании тестовых схем необходимо учитывать, что выходной информацией, получаемой как результат измерения и математической обработки результатов измерения, является совокупность статистических данных: моменты распределений параметров физической структуры, функциональных элементов, характеристик дефектности.

Так как контроль технологического процесса с использованием тестовых схем возможен только с применением автоматизированных систем измерения, то предпочтение отдается конструкциям тестовых элементов, характеризующихся электрически измеряемыми параметрами, по которым расчетным путем и должна быть получена необходимая выходная информация. Основными требованиями, предъявляемыми к измерительному оборудованию, являются возможность измерения электрических параметров тестовых элементов в автоматическом режиме и наличие в своем составе ЭВМ, не только управляющую процессом измерения, но и проводящую обработку изме-

ренных результатов по специально разработанным программам.

С учетом роста стоимости современных электронных средств первостепенное значение при контроле качества приобретает параметрический и функциональный контроль на различных этапах жизненного цикла ЭС. Эти виды контроля осуществляются с помощью специальных тестов.

Функциональный контроль определяет качество функционирования ЭС в соответствии с логикой его работы, ориентирован на обнаружение постоянных неисправностей и является основным видом контроля при производстве и эксплуатации ЭС, в том числе при ремонте. Тесты функционального контроля достаточно компактны, время проверки ЭС невелико, так как не требуется проводить дорогостоящие измерения, необходимые при параметрическом контроле [37].

Параметрический контроль предназначен для проверки соответствия электрических параметров ЭС техническим требованиям и, в свою очередь, подразделяется на статический и динамический контроль. Статический предназначен для контроля не изменяющихся во времени электрических параметров (например, контроль допустимых значений амплитуды выходного сигнала, значений входных токов, тока потребления и т. д.), а динамический — для контролирования временных характеристик электрических сигналов (например, времени задержки сигнала или длительности его фронта). В отличие от функционального, параметрический контроль связан с точными измерениями амплитуд сигналов, значений токов, времени задержек, длительностей импульсов и т. д., что приводит к существенным временным затратам и использованию дорогостоящего оборудования. Основным назначением параметрического контроля является отработка технологического процесса, контроль в процессе производства и выборочный входной контроль [37].

Для обеспечения эффективного применения функционального и параметрического контроля необходимо

наличие тестопригодного изделия. Это требование должно выполняться в процессе проектирования ЭС.

Тестопригодным называют ЭС, для каждой неисправности которого существует по крайней мере один тестовый набор, с помощью которого эта неисправность выявляется, а время построения тестов и их себестоимость не превышает установленных временных и (или) ресурсных затрат.

Следует заметить, что под тестом понимают множество тестовых наборов, предназначенных для контроля качества ЭС. Сам тестовый набор представляет собой совокупность стандартных сигналов, соответствующих логическому нулю или единице на входе ЭС (входной набор), и ожидаемое множество стандартных сигналов на его выходе (выходной набор), соответствующий входному набору и логике функционирования проверяемого ЭС [37].

Выполнение условий тестопригодности при проектировании ЭС существенно сокращает время и упрощает получение необходимых тестовых наборов для выявления неисправностей заданных классов.

Построение тестов функционального контроля проводится для определенного класса неисправностей. Однако при реальном тестировании ЭС не всегда необходимо строить тесты для логических схем, представленных на уровне логических элементов И, ИЛИ, НЕ, когда рассматривается множество неисправностей всех входов и выходов. Можно рассматривать множество неисправностей, отнесенных к входам и выходам конструктивных элементов. В этом случае тест строится только для данного множества неисправностей, а его построение чаще всего требует меньше времени и имеет меньшее количество тестовых наборов.

Для построения тестов функционального контроля наибольшее распространение получили алгоритм случайного поиска и *D*-алгоритм [37].

Алгоритм случайного поиска предполагает выполнение следующих этапов.

1. С помощью генератора псевдослучайных чисел формируется входной набор и подается на вход логической модели.

2. Моделируется исправное состояние схемы и  $N - N_{\text{обн}}$  неисправных состояний схемы, здесь  $N$  — общее число неисправностей, а  $N_{\text{обн}}$  — число неисправностей, обнаруженных тестом. На первом шаге число обнаруженных неисправностей равно нулю, поэтому моделируются все неисправности. Если состояние хотя бы одного выхода исправной схемы отличается от состояния схемы с заданной неисправностью, то эта неисправность считается обнаруженной и заносится в специальный список.

3. Проверяется эффективность тестового набора  $\mathcal{E}_i$ . Если  $\mathcal{E}_i \geq B$ , где  $B$  — заданное количество обнаруженных неисправностей, то набор включается в тест, при этом изменяются списки обнаруженных и необнаруженных неисправностей и осуществляется переход к п. 4. В противном случае, т. е. при  $\mathcal{E}_i < B$ , производится запись номера тестового набора в таблицу не включенных в тест наборов и осуществляют возврат к п. 1.

4. Производится проверка эффективности последних  $K$  тестовых наборов, для чего сравнивают их номера в таблице не включенных в тест наборов. Если номера идут подряд, т. е. последние  $K$  тестовых наборов были неэффективны, то переходят к п. 5; в противном случае — к п. 6.

5. Осуществляется изменение процесса генерации входных наборов (изменение начальной установки генератора, принципа генерации и т. д.).

6. Выполняется проверка обнаружения всех неисправностей ( $N = N_{\text{обн}}$ ). Если это условие соблюдается, то переходят к п. 7.

7. Производится проверка временного критерия. Если время работы алгоритма  $T \leq T_1$ , где  $T_1$  — заданный временной интервал работы алгоритма случайного поиска, то переходят к п. 1, если нет, то работа алгоритма завершается.

Таким образом, результатом работы алгоритма случайного поиска является тест функционального контроля и список необнаруженных неисправностей.

Дальнейшее построение тестовых наборов при наличии списка необнаруженных неисправностей осуществляется с помощью детерминированных алгоритмов.

Детерминированные алгоритмы обеспечивают получение тестов с большей полнотой, чем алгоритмы случайного поиска, однако выполняются значительно медленнее. Наиболее широко в качестве таких алгоритмов применяются *D*-алгоритм и его модификации.

Математический аппарат, применяемый в *D*-алгоритме, основанный на понятии логических кубов и правил действий над ними, подробно рассмотрен в [56]. Сущность алгоритма заключается в реализации идеи активизации пути, которая состоит в том, что на выходе неисправного элемента должно изменяться значение сигнала как свидетельство наличия неисправности. Этот сигнал должен быть передан по цепочке последовательно соединенных логических элементов, составляющих так называемый активизированный путь, на какой-либо выход схемы. В результате значения сигналов на этом выходе у исправной и неисправной схем будут различными.

С помощью *D*-алгоритма находят такой входной набор, который для заданной неисправности выявляет в логической схеме активизированный путь и обеспечивает изменение сигналов на входах и выходах элементов по всему активизированному пути от неисправного элемента до выхода схемы.

Наибольший эффект наблюдается при совместном использовании алгоритма случайного поиска и детерминированных алгоритмов. В этом случае на начальном этапе построения теста используется случайный поиск, а после снижения его эффективности применяется детерминированный алгоритм.

Необходимость параметрического контроля качества ЭС обусловлена рядом причин. Основными из них являются следующие [37].

1. При производстве ЭС нано- и пикосекундного диапазона, в которых задержки распространения сигналов в связях становятся соизмеримыми с задержками распространения на элементах, а иногда и превышают их, предъявляются повышенные требования к точности технологического процесса. Малейшие отклонения от норм приводят к недопустимым изменениям электрических



и динамических характеристик ЭС, например за счет увеличения доли физических дефектов, которые не могут адекватно моделироваться классами постоянных логических неисправностей. Кроме того, обнаружение дефектов, связанных с качеством технологии производства, предъявляет свои требования к процессу генерации тестов и не может быть сведено только к пассивному измерению значений параметров на тестовых последовательностях, ориентированных на другой класс неисправностей.

2. Некоторые виды физических дефектов приводят к появлению неустойчивого логического уровня сигнала (в одних случаях сигнал определяется как логический ноль, а в других — как логическая единица). Такие дефекты могут быть не обнаружены тестами, ориентированными на класс устойчивых логических неисправностей. Некоторые из такого рода физических дефектов обнаруживаются только тестами параметрического контроля. Другими словами, параметрический контроль позволяет расширить область обнаруживаемых неустойчивых неисправностей.

3. Информация о разбросе действительных электрических и динамических характеристик позволяет корректно организовывать некоторые контрольные эксперименты, например с заданием не нормируемых, а изменяющихся в пределах некоторого допуска значений входных сигналов (допусковый контроль).

4. Информация о действительных электрических и динамических характеристиках необходима для оценки качества выпускаемой продукции в текущий момент времени.

Таким образом, современный этап развития технологии производства ЭС требует внедрения не только тестов функционального, но и тестов параметрического контроля.

Для формализации процесса получения тестов параметрического контроля необходима математическая модель. Это может быть, например, модель в виде системы дифференциальных уравнений, позволяющая детально рассматривать динамику изменения этих параметров. Однако использование такого рода моделей чрезвычайно

сложно для указанных выше объектов контроля, а получаемая от них информация является избыточной для поставленных целей.

В этих случаях используются аналитические и структурные модели, построенные на основании различного рода зависимостей, в качестве которых используются, например, зависимости, описывающие величину задержки сигнала, максимальных токов потребления схемы и выходного сигнала, формирования напряжения на выходе устройства и др. [37].

Зависимости, представляющие суммирование токов и ориентированные на проверку помехозащищенности, могут служить для обнаружения коротких замыканий и обрывов входных цепей, а также выявления неисправности элементов входного уровня, работающих непосредственно от входов проверяемого ЭС. Контроль этих параметров полезен при отсутствии тестов, ориентированных на обнаружение неисправностей типа «короткое замыкание связей», «короткое замыкание элементов», так как позволяет обнаружить наиболее вероятные из дефектов технологического процесса.

Тесты для порогового значения входного сигнала, основанные на зависимостях, полученных в предположении существования активизированного пути « $j$ -й вход схемы —  $i$ -й выход», позволяют диагностировать дефекты, связанные с потерей стабилизирующих свойств элемента, и дефекты связей, влияющие на уровни напряжения (сопротивления проводников, превышающие значения, определяемые стабилизирующими свойствами элементов).

Необходимо заметить, что выбор моделей должен учитывать поставленные задачи, технологию производства и состав средств моделирования.

Построение измерительных тестов параметрического контроля предъявляет более жесткие требования к алгоритмам генерации тестовых наборов, чем построение тестов для функционального контроля.

Такой алгоритм должен не только удовлетворять всем условиям построения тестов для константных неисправностей, но и обеспечивать следующие основные требования:

- активизацию любого пути в схеме;
- подачу перепада напряжения на входе активизируемого пути (изменение логического значения сигнала на входе с единицы на нуль или с нуля на единицу) при условии постоянного значения сигналов на других входах;
- блокировку параллельного распространения перепада логических значений по путям со сходящимися разветвлениями.

Обеспечение этих требований осуществляется при помощи программ построения тестов параметрического контроля, входящих в состав системы автоматизированного построения тестов.

Разработка теста для ЭС, как правило, начинается с априорной оценки трудоемкости построения теста. Для этого существует целый ряд методов, на основании которых может быть дана количественная оценка тестопригодности для отдельных составных частей ЭС. Наименьшие показатели тестопригодности указывают на необходимость внесения изменений в проектируемое средство, приводящих, в свою очередь, к упрощению процедуры построения тестов.

Методика построения тестов состоит из двух основных частей: установки на входах схемы ЭС значений параметров, необходимых для обнаружения неисправности, и обеспечения наблюдения реакции схемы с данной неисправностью на ее выходах. Оценка трудоемкости первой части соответствует значению «управляемости», а второй — «наблюдаемости» для данного элемента схемы. На основании значений управляемости и наблюдаемости и рассчитывается тестопригодность схемы [37], [40].

Первый показатель тестопригодности — управляемость, максимальное значение которой имеет вход схемы, где можно легко установить как логическую 1, так и логический 0. Другое предельное значение управляемости — логический 0, имеет элемент, вход которого не может быть установлен в одно из двух возможных состояний, например заземленный вход. Значения управляемости реальных элементов находятся в диапазоне от 0 до 1.

Если входы логической схемы управляются непосредственно, то управляемость его выходов должна просто отражать меру способности устройства к установке на каждом его выходе 0 или 1, что определяется логической функцией схемы. Однако в общем случае управляемость входов не составляет 100%. Поэтому управляемость выходов должна учитывать как способность к передаче логических значений через элемент, так и значения управляемости на его входах, и выражение, используемое для вычисления значений управляемости для каждого выхода, имеет вид

$$C_{\text{вых}} = K_c f(C_{\text{вх}}).$$

В этой формуле  $K_c$  — коэффициент передачи управляемости элемента, связанный с этим выходом, а  $f(C_{\text{вх}})$  зависит от значений управляемости всех входов, которые управляют рассматриваемым выходом.

Заметим, что коэффициент  $K_c$  выхода является мерой, характеризующей степень различия способности элемента генерировать на данном выходе значение логической единицы от способности генерировать значение нуля. Этот коэффициент зависит только от логической функции, реализуемой элементом, и не зависит от места его расположения в схеме. Значение функции  $f(C_{\text{вх}})$  определяется как среднее арифметическое значение управляемости на входах элемента. Если вход может быть непосредственно установлен в 1, то значение  $f(C_{\text{вх}}) = 1$  и соответственно

$$C_{\text{вых}} = K_c.$$

Рассмотрим теперь второй показатель тестопригодности — наблюдаемость. Для элемента логической схемы определяется как мера, характеризующая способность к передаче информации о логическом состоянии данного элемента на один или несколько выходов схемы. Это означает, что наблюдаемость входа схемы равна 1, и это значение уменьшается по мере продвижения сигналов вдоль активизированного пути. Однако в общем случае процесс распространения информации о неисправности зависит как от условия активизации определенного входа, так и от условия установки фиксированных значений на некото-

рых или всех входах, позволяющих активизировать путь к определенному выходу. Следовательно, наблюдаемость на выходе

$$V_{\text{вых}} = K_v V_{\text{вх}} f(C_{\text{вх}}),$$

где  $K_v$  — коэффициент передачи наблюдаемости.

Коэффициент  $K_v$  является количественной мерой, характеризующей уменьшение значения наблюдаемости элемента по мере продвижении к выходу вдоль активизированного пути при условии, что другие элементы схемы управляемы. Этот коэффициент определяет способность схемы передавать изменения логического состояния одного входа на определенный выход. Коэффициент передачи наблюдаемости от входа элемента к его выходу, должен быть равен 0, если не существует пути транспортировки неисправности между этими двумя точками. С другой стороны,  $K_v = 1$ , если транспортировка осуществляется всегда независимо от состояний активизирующих входов. Однако в действительности величина  $K_v$  находится между этими двумя предельными значениями.

Введя понятия управляемости и наблюдаемости и способы их оценки, рассмотрим меру тестопригодности  $T$  элемента и всего ЭС [37]. Для каждого элемента мы имеем соотношение

$$T = CV.$$

При этом удовлетворяются следующие условия:

- $T = 0$ , если либо  $C = 0$ , либо  $V = 0$ ;
- $T = 1$ , если и  $C = 1$ , и  $V = 1$ ;
- $0 < T < 1$  при  $0 < C < 1$  и  $0 < V < 1$ .

Например, если элемент имеет  $C = 0,5$  и  $V = 0,5$ , то его тестопригодность можно оценить как  $T = 0,25$ .

Общий показатель тестопригодности для всего ЭС определяется как среднее арифметическое значение тестопригодности всех элементов ЭС:

$$T_{\text{ЭС}} = \frac{\sum T}{N},$$

где  $N$  — число элементов в ЭС.

В настоящее время тесты для различных видов контроля качества ЭС разрабатываются в основном с помощью специальных САПР, в которых имеются независимые подсистемы автоматизированного построения тестов, использующие хранящуюся в базе данных информацию о логических схемах и электрических характеристиках элементов ЭС. В состав таких САПР, кроме того, входят программы, с помощью которых возможно определить тестопригодность ЭС.

Блок-схема автоматизированной системы построения тестов, приведенная на рисунке 4.23, является общей для функционального и параметрического контроля качества ЭС. Рассмотрим ее основные элементы [37].

Блок 1 предназначен для трансляции описания логической схемы рассматриваемого ЭС на языке САПР и передачи в базу данных (блок 2), где хранится информация обо всех логических схемах ЭС. Блок 3 представляет библиотеку логических элементов, соответствующих разработанным и выпускаемым интегральным микросхемам, типовым элементам замены, модулям и т. п. с описанием их логических схем и физических характеристик.

Управление (блок 4) осуществляется через диалоговую систему, основным назначением которой являются задание режимов работы системы построения тестов, отображение и анализ информации о результатах работы, ввод исходных данных и анализ проектируемых тестов, а также внесение необходимых изменений в тестируемые ЭС.

Преобразование входной информации о тестируемом ЭС и представление ее в удобной для последующей работы системы форме выполняется тремя трансляторами. Транслятор для логической модели (блок 5) подготавливает информацию для блока 8 структурного анализа логической схемы ЭС. Этот блок на рисунке 4.23 выделен отдельно, но он тесно связан с блоком 12 «логическая модель схемы». Кроме того, информация о структуре ЭС и его элементах может быть использована также для количественных оценок тестопригодности ЭС. Получение такой информации позволяет разработчику проанализировать и при необходимости изменить принципиальную схему тестируемого ЭС.

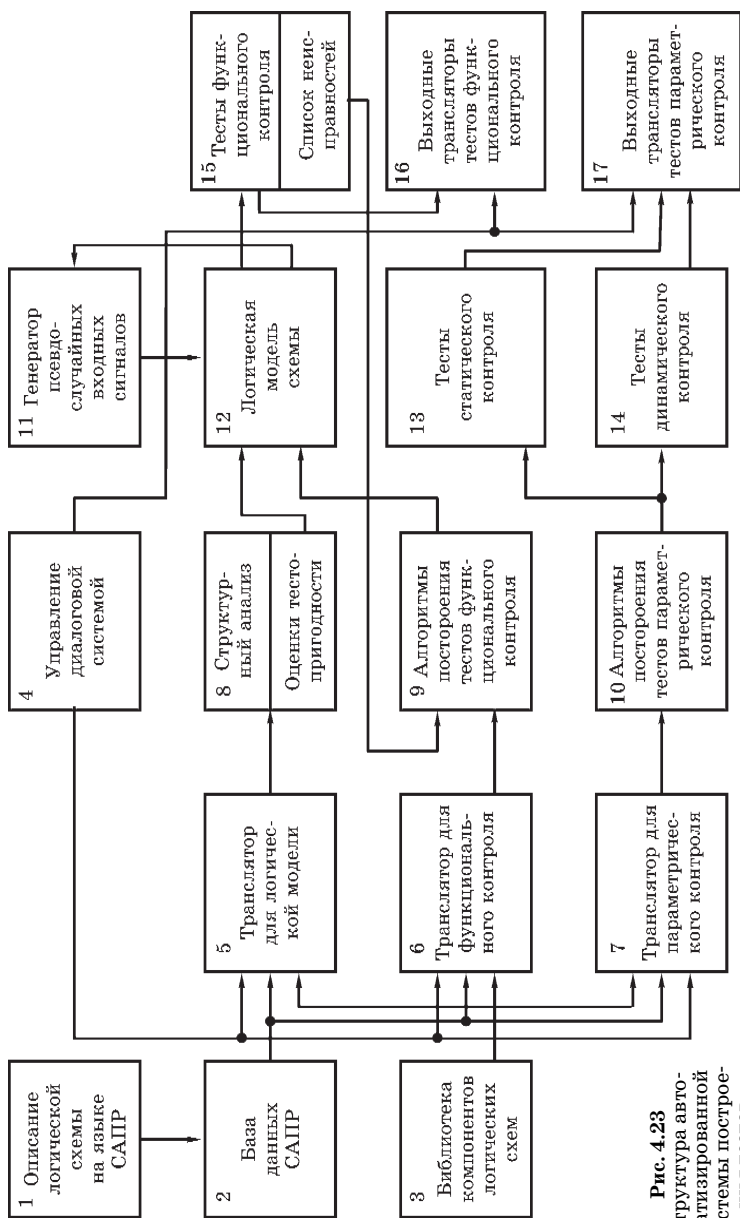


Рис. 4.23 Структура автоматизированной системы построения тестов

Наиболее быстрым методом построения тестов функционального контроля является использование алгоритма случайного поиска. Сформированные генератором псевдослучайных чисел входные последовательности подаются на вход логической модели, где проверяется их корректность и тестовая способность — обнаружение дефектов, имеющих на данном шаге в списке необнаруженных неисправностей (блоки 11, 12), после чего формируется тестовый набор.

Тестовый набор заносится в список тестов функционального контроля, а список необнаруженных неисправностей корректируется — исключаются обнаруженные тестовым набором неисправности (блок 15). Получение тестов с помощью алгоритма случайного поиска прекращается по любому из критериев, введенных в систему построения тестов, — времени работы или числу обнаруженных неисправностей на  $n$ -м шаге. В дальнейшем, если в списке неисправностей остались необнаруженные дефекты, через управление системой запускаются алгоритмы построения тестов функционального контроля (блок 9, в который из блока 15 передается список необнаруженных неисправностей). Результатом работы блока 9 является полученный для данной неисправности тестовый набор, передаваемый в блок 12.

Для построения тестов параметрического контроля требуется получить специальную информацию из базы данных САПР. Это осуществляется с помощью особого транслятора (блок 7) для программ построения тестов параметрического контроля. Алгоритмы построения тестов параметрического контроля (блок 10) тесно связаны с детерминированными алгоритмами, так как в обоих случаях необходимо иметь так называемый «активизированный путь» от входа до выхода схемы. Результатом работы этих алгоритмов являются тесты статического и тесты динамического контроля (блоки 13 и 14). Построенные тесты подаются на выходные трансляторы (блоки 16 и 17), которые преобразуют их в команды тестеров.

Следует отметить, что для каждого вида контроля необходим тестер со своим набором функций. Общими частями для всех тестеров являются коммутирующее



устройство (так называемый контактор, в который помещается проверяемое ЭС) и устройство управления. В свою очередь в устройстве управления могут использоваться микропроцессоры, платы интерфейса и пр.

Динамический контроль, связанный с измерением временных параметров сигналов, требует применения специальных тестеров, поскольку методы измерения этих параметров значительно отличаются от методов, используемых при статическом контроле. Кроме того, высокие требования предъявляются к коммутирующим устройствам, поэтому тестеры динамического контроля проектируют и производят отдельно от тестеров других видов контроля.

#### **4.5. ЗАДАЧИ КОНСТРУКТОРСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

Решение задач конструкторского проектирования во многом регламентировано существующими нормативно-техническими документами — государственными и отраслевыми стандартами, инструкциями, техническими условиями и пр., поскольку конечной целью проектирования является получение технической документации, позволяющей изготовить требуемое устройство в заданных условиях. Реализация этой цели связана с решением комплекса разнообразных и сложных задач, учитывающих специфику разрабатываемого изделия. С учетом того, что конструкция большинства ЭС содержит функциональные узлы на печатном монтаже, задачи конструкторского проектирования печатных узлов занимают одно из важнейших мест среди всех видов конструкторских работ.

Как объект проектирования, печатный узел имеет ряд особенностей. К ним относятся значительное число связей между элементами, наличие возмущающих воздействий, возникновение паразитных связей между элементами и т. п. Кроме того, часто накладываются дополнительные, иногда противоречивые ограничения (например, заданная ширина печатного проводника, максимально допустимая длина электрических связей, минимальное расстояние между соседними проводниками, размеры и конфигура-

ция формы печатной платы). Поэтому решение задач конструкторского проектирования функциональных узлов связано с реализацией в САПР взаимосвязанных между собой разнообразных и сложных алгоритмов.

Укрупненно задачи конструкторского проектирования печатных узлов можно разделить на два основных вида — задачи геометрического и топологического проектирования. Геометрическое проектирование связано с определением размеров, формы заготовки и т. п. Исходными данными здесь служат требования к геометрии печатной платы. Топологическое проектирование является наиболее сложным и ответственным этапом разработки печатных плат, оно позволяет определить структуру объекта с учетом функциональных связей. В качестве исходных данных здесь используются в том числе и результаты решения задач геометрического проектирования. Результаты этого этапа во многом определяют качественные характеристики спроектированного устройства.



Рис. 4.24

Состав и взаимосвязь задач топологического проектирования

В свою очередь топологическое проектирование также связано с решением целого спектра задач, состав и взаимосвязь между которыми показаны на рисунке 4.24.

Для автоматизированного решения задач компоновки, размещения и трассировки к настоящему времени создано множество разнообразных методов и алгоритмов. Учитывая важность этих задач и востребованность алгоритмов их решения в современных САПР, рассмотрение методов и алгоритмов решения задач конструкторского проектирования выделим в отдельную — следующую главу учебного пособия.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие основные задачи автоматизированного проектирования ЭС вы знаете?
2. Какими особенностями обладают задачи системотехнического проектирования?
3. Как формулируется постановка задачи принятия решения?
4. В чем отличие между задачей выбора оптимального варианта и задачей выбора предпочтительного варианта?
5. На какие классы по степени определенности и полноты исходных данных разделяют задачи системотехнического проектирования? В чем их особенности и отличия?
6. Как математически формулируется модель задачи принятия решения?
7. Какие методы используются при принятии решений в условиях полной неопределенности?
8. В чем состоит сущность метода экспертных оценок?
9. Как определяют степень согласованности экспертов?
10. В чем заключается метод оптимизации по Парето?
11. Какие основные этапы включает в себя методика проведения экспертизы в задачах принятия проектных решений?
12. Какие методы используются при принятии решений в условиях частичной неопределенности?
13. В чем состоят основные отличия между методами равной вероятности, Гурвица и Шаньявского?

14. Что представляет собой метод Сэвиджа?
15. В каких случаях применяют метод Байеса — Лапласа?
16. В чем заключается метод анализа иерархий?
17. Какие методы, основанные на байесовском подходе, вам известны? В чем их отличие от других методов принятия решений?
18. В каких случаях удобно применять метод Шортлифа — Бьюкенена?
19. Какие задачи решаются методом Демпстера — Шафера?
20. На решение каких системотехнических задач нацелены методы нечеткой логики?
21. Как формулируется задача принятия проектных решений с использованием нечеткой логики?
22. Какие виды может иметь функция принадлежности нечетких множеств?
23. Какие основные результаты получают в ходе выполнения этапов фаззификации, агрегирования, активизации, аккумуляции и дефаззификации?
24. Что понимают под управлением проектами?
25. Какие основные задачи управления проектами вы знаете?
26. В чем заключаются особенности моделей, используемых в методах управления проектами?
27. В чем состоит сущность метода динамической альтернативности?
28. Какие основные задачи решаются при схемотехническом проектировании?
29. Какими особенностями характеризуются схемотехнические задачи?
30. Как формулируется задача структурного синтеза?
31. Какие методы используются для решения задач структурного синтеза?
32. Какова область применения и на чем основан метод анализа структурных схем?
33. По каким правилам осуществляют упрощение структурных схем?
34. Как формулируется задача параметрического синтеза?

35. Какие методы используются для решения задач параметрического синтеза?
36. В каких целях решаются задачи допускового анализа и синтеза?
37. Какие методы используются для обработки результатов статистического эксперимента?
38. В чем заключается сущность метода Монте-Карло?
39. В каких целях осуществляют анализ сигналов?
40. В чем заключается метод анализа Фурье?
41. Каким образом вид симметрии сигнала учитывается при разложении периодической функции в ряд Фурье?
42. В чем заключаются недостатки алгоритмов, основанных на дискретном преобразовании Фурье?
43. Какие основные задачи приходится решать при проектировании технологических процессов?
44. На каких методах основано решение задач технологического проектирования?
45. Как выполняют анализ качества технологических процессов?
46. Что понимают под структурной схемой формирования выходных параметров?
47. Какие укрупненные группы факторов характеризуют технологический процесс в целом?
48. По каким принципам формируется технологическая схема автоматизированного контроля качества?
49. В каком порядке рекомендуется проводить анализ технологического процесса по критериям точности и стабильности?
50. Какие методы и алгоритмы автоматизированного контроля качества технологических процессов вам известны?
51. В чем заключаются операционный, функциональный и параметрический виды контроля?
52. Что представляют собой тестовая структура и тестовая схема?
53. На чем основаны методы органолептического анализа?
54. Какие основные этапы включает в себя алгоритм случайного поиска при построении тестов функционального контроля?

55. В каких целях при построении тестов функционального контроля используют детерминированные алгоритмы?
56. Какие особенности должны учитывать измерительные тесты параметрического контроля?
57. Что понимают под управляемостью и наблюдаемостью?
58. Как происходит функционирование автоматизированной системы построения тестов?
59. Какие цели достигаются при решении задач конструкторского проектирования?
60. На какие дополнительные задачи подразделяется класс задач топологического проектирования?

## МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНСТРУКТОРСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

**О**снову математического обеспечения решения задач конструкторского проектирования функциональных узлов на печатном монтаже составляют методы и алгоритмы, основанные на графовых моделях электрических схем. Подобные алгоритмы используются также и при разработке топологии кристаллов микросхем различной степени интеграции. Важность детального рассмотрения указанных методов и алгоритмов обусловлена их широкой реализацией в таких наиболее известных САПР, как *Altium Designer*, *OrCAD*, *NI Ultiboard*, *Proteus*, *BoardMaker* и др. и связана с необходимостью понимания специалистом-проектировщиком скрытых алгоритмических процессов, протекающих в данных программных средах для получения наилучших результатов в своей работе. Решение комплекса задач конструкторского проектирования (см. рис. 4.24) предполагает выполнение ряда вспомогательных этапов, или подзадач.

Компоновка (разрезание) заключается в группировании компонентов по критерию связности, что необходимо или для размещения формируемых групп в отдельных чипах при многокристальной реализации (на отдельных печатных платах), или для определения их взаимного расположения в одном кристалле (на одной плате) при выполнении процедуры планировки кристалла (платы).

Далее следуют этапы размещения компонентов на кристалле (плате) и трассировки соединений. От качества проведенного размещения во многом зависит и ре-

зультат будущей трассировки. После выполнения этапа трассировки обычно проводят сжатие топологии во всех направлениях для уменьшения площади, занимаемой схемой. Следует заметить, что при решении задач, связанных с трассировкой реальных печатных плат, в качестве ограничений на сжатие топологии выступают минимально допустимые размеры элементов печатного рисунка, определяемые выбранным классом точности печатной платы.

Заключительными этапами решения задач конструкторского проектирования служит верификация, т. е. проверка соответствия устройства полученной топологии электрической принципиальной схеме, а также проведение необходимых поверочных расчетов на механические воздействия, тепловую и электромагнитную совместимости электронных компонентов печатного узла.

### 5.1. ЗАДАЧИ КОМПОНОВКИ

Компоновкой называется процесс перехода от схемы ЭС к конструктивному распределению (разбиению) всех элементов на группы, соответствующие конструктивам различных уровней (микросхем, типовых элементов замены, панелей блоков, стоек и т. д.).

Иногда выделяют три постановки задачи компоновки: разбиение — разрезание исходной схемы на части; покрытие — преобразование исходной схемы в схему соединений элементов; типизация — разделение схемы на группы конструктивных элементов различных типов (см. рис. 4.24).

В дальнейшем под компоновкой (если это не оговорено особо) будем понимать разрезание большой схемы (структурной, функциональной, принципиальной) на части. Эта задача формулируется следующим образом.

Пусть исходная схема представляется мультиграфом  $G(V, R)$ , здесь множество вершин  $V$  соответствует множеству конструктивных модулей, а множество ребер  $R$  — связям между ними. Требуется разрезать (разбить) граф



$G(V, R)$  на  $n$  частей  $G_1(V_1, R_1), \dots, G_n(V_n, R_n)$  с  $N_i, i = \overline{1, n}$  вершинами в каждой так, чтобы число ребер, соединяющих вершины разных частей, было минимальным, т. е. критерий оптимальности имеет вид

$$Q = \sum_{i,j=1}^n |R_{i,j}| \rightarrow \min_{V_1, \dots, V_n}, \quad (5.1)$$

где  $|R_{i,j}|$  — мощность множества ребер  $R_{i,j}$ , инцидентных частям  $G_i(V_i, R_i)$  и  $G_j(V_j, R_j)$  графа  $G$ .

При этом должен выполняться ряд ограничений.

1. Число вершин в каждой части должно быть задано, т. е.

$$\forall i = \overline{1, n} : |V_i| = N_i. \quad (5.2)$$

2. Одна вершина должна принадлежать лишь одной части, т. е.

$$\forall G_i, G_j : G_i \neq G_j \Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset. \quad (5.3)$$

3. Объединение всех частей должно быть равно исходному графу, т. е.

$$\bigcup_{i=1}^n G_i(V_i, R_i) = G(V, R). \quad (5.4)$$

4. Максимально допустимое число внешних связей каждой части не должно превышать допустимой величины  $S_i$ :

$$\left| \bigcup_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n R_{i,j} \right| \leq S_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.5)$$

5. Раздельная компоновка ряда вершин  $v_k, v_l \in V$  в разных частях графа, т. е.

$$v_k \in V_i \Rightarrow v_l \in V \setminus V_i. \quad (5.6)$$

6. Некоторые вершины  $v_p, v_q$  должны быть жестко закреплены за определенными частями  $V_i, V_j$ . Такие вершины называются закрепленными, т. е.

$$v_p \in V_i, v_q \in V_j. \quad (5.7)$$

Следует заметить, что ограничения (5.2)–(5.7) на компоновку накладываются в зависимости от различных требований, предъявляемых к изделию, а также для учета различных физических факторов. Так, например, ограничение (5.6) обычно связано с выполнением условий электромагнитной и тепловой совместимости различных компонентов схемы. Поэтому применительно к реальным схемам при решении задачи компоновки могут накладываться как все рассмотренные ограничения, так и отдельные из них.

Для автоматизированного решения задачи компоновки применяется ряд достаточно сложных алгоритмов, позволяющих учитывать все особенности и ограничения конкретной задачи (5.2)–(5.7). Основу этих алгоритмов составляют упрощенные базовые алгоритмы, некоторые из которых рассмотрим ниже.

### 5.1.1. Последовательный алгоритм, использующий матрицу смежности

Идея алгоритма состоит в поочередной компоновке частей графа. При формировании  $j$ -й части  $G_j(V_j, R_j)$  из рассматриваемого множества  $V \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$  вершин выбирает-

ся вершина  $v^{(j)}$  с минимальной степенью  $s(v^{(j)})$ . К этой вершине добавляются смежные с ней вершины, в результате образуется подмножество  $V_{(j)}$ , мощность которого сопоставляется с требуемым числом вершин в части  $N_j$ . Если  $|V_{(j)}| \neq N_j$ , то добавляется или удаляется необходимое число вершин, затем формируют следующую  $(j+1)$ -ю часть и т. д. Рассмотрим основные этапы алгоритма на примере выделения части  $G_j(V_j, R_j)$  [3].

1. Исходный мультиграф  $G(V, R)$  представляется матрицей смежности  $S$ .

2. Выбирается вершина  $v^{(j)}$ , степень которой минимальна, т. е.

$$s(v^{(j)}) = \min_v \{s(v_i), v_i \in V\}, \quad i = \overline{1, |V|}.$$

Если вершин с минимальной степенью несколько, то выбирается вершина с максимальным числом кратных ребер.

3. Формируется первоначальное подмножество вершин  $V_{(j)}$  для  $j$ -й части, в которое включается вершина  $v^{(j)}$  и смежные с ней вершины.

4. На основе подмножества  $V_{(j)}$  образуется множество вершин  $V_j$   $j$ -й части. Если мощность подмножества  $V_{(j)}$  равна заданному числу вершин, т. е.  $|V_{(j)}|=N_j$ , то  $V_j=V_{(j)}$ . В случае  $|V_{(j)}| > N_j$  необходимое число вершин удаляется, а при  $|V_{(j)}| < N_j$  — добавляется. В результате komponуется  $j$ -я часть.

5. Из графа  $G(V, R)$  удаляется сформированная часть  $G_j(V_j, R_j)$ .

Для оставшегося графа  $G(V, R) \setminus G_j(V_j, R_j)$  аналогично выделяется следующая часть  $G_{j+1}(V_{j+1}, R_{j+1})$  и т. д.

Наибольшую трудность выполнения работы представляют расчеты четвертого этапа для случая  $|V_{(j)}| \neq N_j$ . Чтобы определить, какую вершину удалять из  $V_{(j)}$  (или добавлять к  $V_{(j)}$ ), для каждой вершины  $v_i \in V_{(j)}$  (или  $v_i \in V \setminus V_{(j)}$ ) определяется ее относительный вес

$$\delta(v_i) = s(v_i) - \sum_{k \in J_j} s_{ij}, \tag{5.8}$$

где  $s(v_i)$  — степень вершины  $v_i$ ;  $s_{ij}$  — элемент матрицы  $S$ ;  $J_j$  — множество номеров вершин  $j$ -й части  $v_i \in V_{(j)}$ .

Относительный вес вершины характеризует приращение числа внешних ребер части  $G_j(V_j, R_j)$  при включении вершины  $v_i$  в часть  $V_{(j)}$ . Из множества вершин  $V_{(j)}$  удаляется вершина, для которой вес  $\delta(v_i)$  максимален, или добавляется вершина  $v_i \in V \setminus V_{(j)}$  с минимальным значением  $\delta(v_i)$ .

Покажем это на простейшем примере. Пусть заданный мультиграф  $G(V, R)$  (рис. 5.1) с числом вершин (мощностью)  $|V|=7$  требуется разбить на  $n=3$

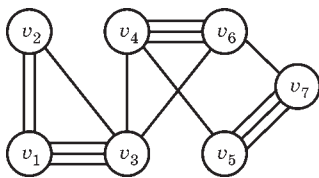


Рис. 5.1  
Исходный мультиграф

части, с количеством вершин в каждой части  $N_1=3$ ,  $N_2=2$  и  $N_3=2$  соответственно.

Исходный мультиграф  $G(V, R)$  представим матрицей смежности  $S$ :

$$S = \begin{array}{c} v \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} s(v_i) \\ 5 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{array}.$$

Рядом с матрицей выписаны значения степеней вершин  $s(v_i)$ , которые определяются как суммы элементов соответствующих строк. Так как минимальную степень имеет вершина  $v_2$ , т. е.  $v^{(1)}=v_2$ , то получаем следующее первоначальное подмножество вершин для первой части  $V_{(1)}=\{v_2; v_1; v_3\}$ .

На основании первоначального подмножества  $V_{(1)}$  формируется множество вершин  $V_1$  первой части. Так как в нашем примере мощность полученного подмножества равна числу элементов первой части:  $|V_{(1)}|=N_1$ , то первую часть считаем скомпонованной:  $V_1=V_{(1)}$ .

Сформированную часть  $G_1(V_1, R_1)$  удаляем из исходного графа  $G(V, R)$ , а для оставшейся части повторяем тот же алгоритм. Удаление вершин из графа соответствует вычеркиванию строк и столбцов из матрицы смежности. Для вновь образованной матрицы степени вершин одинаковы, т. е.

$$S = \begin{array}{c} v \\ \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} s(v_i) \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{array}.$$

Так как и число кратных ребер одинаково, то выбираем любую вершину (например,  $v_4$ ) и формируем первоначальное подмножество, состоящее из выбранной вершины, и всех вершин, смежных с ней:  $V_{(2)} = \{v_4; v_5; v_6\}$ . Так как мощность полученного подмножества больше числа элементов во второй части:  $|V_{(2)}| = N_2$ , то необходимо исключить одну вершину. Значения относительных весов рассчитываются с учетом  $V_{(2)}$  по формуле (5.8):

$$\delta(v_4) = s(v_4) - \sum_{k \in J_2} s_{4,k} = 4 - 4 = 0;$$

$$\delta(v_5) = s(v_5) - \sum_{k \in J_2} s_{5,k} = 4 - 1 = 3;$$

$$\delta(v_6) = s(v_6) - \sum_{k \in J_2} s_{6,k} = 4 - 3 = 1, \quad J_2 = \{4, 5, 6\}.$$

Удаляем вершину  $v_5$  с максимальным относительным весом. Следовательно, вторую часть считаем скомпонованной, т. е.  $V_2 = V_{(2)} = \{v_4; v_6\}$ . В последнюю часть вошли оставшиеся вершины:  $V_3 = \{v_5; v_7\}$ . Вид скомпонованного мультиграфа показан на рисунке 5.2.

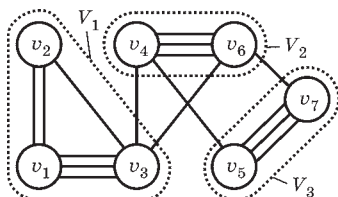


Рис. 5.2  
Скомпонованный мультиграф

Завершающим этапом решения задачи разбиения является определение критерия оптимальности по формуле (5.1), характеризующего число внешних связей. Для нашего примера таких связей четыре, т. е.  $Q = 4$ .

### 5.1.2. Последовательный алгоритм, использующий матрицу цепей

Принципиальные электрические схемы соединения многоконтактных элементов (например, микросхем и микросборок) удобно представлять гиперграфом  $\mathcal{G}$

$$C = \|c_{ij}\|_{m \times k},$$

где  $m$  — число элементов схемы;  $k$  — число выводов многоконтактных элементов.

Элемент  $c_{ij}$  матрицы  $\mathbf{C}$  означает номер электрической цепи, которая подключается к  $j$ -му выводу  $i$ -го многоконтактного элемента. Если контакт свободен, то  $c_{ij}=0$ . Оптимальному разбиению схемы на  $n$  частей  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$  соответствует такое разбиение матрицы  $\mathbf{C}$  на подматрицы  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n$ , при котором число связей между частями минимально [3]. Критерий оптимальности в этом случае записывается в виде

$$Q = \sum_{i=1} \sum_{\substack{j=1, \\ j>i}} |R_{ij}| = \sum_{i=1} \sum_{\substack{j=1, \\ j>i}} |\mathbf{C}_i \cap \mathbf{C}_j| \rightarrow \min_{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n}, \quad (5.9)$$

где  $R_{ij}$  — число связей между  $i$ -й и  $j$ -й частями.

Работа алгоритма заключается в поочередном определении для каждого элемента схемы  $v_i$  чисел  $\Delta R_1^i, \Delta R_2^i, \dots, \Delta R_n^i$ , характеризующих приращение связей при расположении этого элемента в части  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ . Для определения чисел  $\Delta R_j^i, j=1, n$  вводится вспомогательная матрица  $\mathbf{W} = \|w_{ij}\|_{n \times l}$ , где  $l$  — число цепей схемы;  $n$  — число частей разбиения. Элемент матрицы  $w_{ij}$  определяется соотношением

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я цепь } u_j \text{ содержится в } i\text{-й части;} \\ 0, & \text{если } j\text{-я цепь } u_j \text{ не содержится в } i\text{-й части.} \end{cases} \quad (5.10)$$

Величина  $\Delta R_j^i$  равна числу единиц  $l$ -вектора строки  $\mathbf{W}_j^i$ , рассчитываемой по формуле

$$\mathbf{W}_j^i = \bar{\mathbf{W}}_j \mathbf{W}_0^i \left[ \begin{array}{c} n \\ \vee \\ v=1, v \neq j \end{array} \mathbf{W}_v \right], \quad \Delta R_j^i = |\mathbf{W}_j^i|, \quad (5.11)$$

где  $\mathbf{W}_v$  —  $v$ -я строка матрицы  $\mathbf{W}$ ;  $\bar{\mathbf{W}}_j$  — инверсия строки  $\mathbf{W}_j$ ;  $\mathbf{W}_0^i$  —  $l$ -вектор-строка, заполненная в соответствии с (5.10).

Из чисел  $\Delta R_1^i, \Delta R_2^i, \dots, \Delta R_n^i$  выбирается минимальное, и элемент  $v_i$  заносится в соответствующую часть.

Последовательность решения задачи рассмотрим на примере разбиения фрагмента электрической схемы (рис. 5.3) на части  $V_1$  и  $V_2$  с количеством элементов в каждой части

$N_1=3$  и  $N_2=2$ , причем за первой частью закреплен элемент  $v_1$ , а за второй — элемент  $v_5$ .

1. Заданная схема представляется матрицей цепей  $C$

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

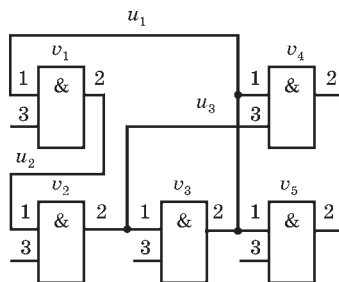


Рис. 5.3  
Фрагмент электрической схемы

2. Для закрепленных за отдельными частями элементов составляется вспомогательная матрица  $W$ , т. е.

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad V_1 = \{v_1\}, \quad V_2 = \{v_5\}.$$

При составлении матрицы следует учесть, что если хотя бы одна из вершин содержит данную цепь, то в соответствующей ячейке ставится единица.

3. Берется очередной незакрепленный элемент  $v_i$  и для него заполняется строка  $W_0^i$ , в нашем случае это  $v_2$  и  $W_0^2 = [0 \ 1 \ 1]$ .

4. Определяется часть, в которую заносится элемент  $v_i = v_2$ . Для этого выполняются следующие расчеты:

- записываются инверсии  $\bar{W}_j, j=1, n$  для частей разбиения ( $n=2$ ), т. е.  $\bar{W}_1 = [0 \ 0 \ 1]$  и  $\bar{W}_2 = [0 \ 1 \ 1]$ ;
- подсчитываются множители в формуле (5.11), содержащие дизъюнкции, для нашего примера это  $W_1 = [1 \ 1 \ 0]$  и  $W_2 = [1 \ 0 \ 0]$ ;
- по формуле (5.11) определяются строки  $W_j^i, j=1, n$  и числа  $\Delta R_j^i, j=1, n$ , т. е. в случае нашего примера

$$W_1^2 = \bar{W}_1 \cdot W_0^2 \cdot W_2 = [0 \ 0 \ 1][0 \ 1 \ 1][1 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0], \quad \Delta R_1^2 = |W_1^2| = 0;$$

$$W_2^2 = \bar{W}_2 \cdot W_0^2 \cdot W_1 = [0 \ 1 \ 1][0 \ 1 \ 1][1 \ 1 \ 0] = [0 \ 1 \ 0], \quad \Delta R_2^2 = |W_2^2| = 1;$$

- находится минимальное число

$$\Delta R_q^i = \min\{\Delta R_j^i, \quad j = \overline{1, n}\},$$

и если  $q$ -я часть еще не заполнена (число элементов в ней меньше заданного  $N_q$ ), то элемент  $v_i$  заносится в  $q$ -ю часть, в противном случае берется следующее по величине число  $\Delta R_j^i$  и т. д. В нашем примере  $\Delta R_q^2 = \Delta R_1^2 = 0$ , поэтому элемент  $v_2$  заносится в первую часть и после выполнения данного этапа  $V_1 = \{v_1, v_2\}$ , а  $V_2 = \{v_5\}$ .

5. Корректируется строка матрицы  $\mathbf{W}$  с учетом распределения элемента  $v_2$ , скорректированная матрица равна

$$\mathbf{W} = \begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \quad u_3 \\ V_1 \\ V_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

6. Выбирается следующий незакрепленный элемент, для которого выполняются этапы 4–5, и т. д., пока не будут заполнены все части. В нашем случае очередным элементом является  $v_3$ , для него

$$\mathbf{W}_0^3 = [101]; \quad \begin{array}{l} \bar{\mathbf{W}}_1 = [0 \ 0 \ 0], \\ \bar{\mathbf{W}}_2 = [0 \ 1 \ 1], \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{W}_1 = [1 \ 1 \ 1], \\ \mathbf{W}_2 = [1 \ 0 \ 0], \end{array}$$

$$\mathbf{W}_1^3 = \bar{\mathbf{W}}_1 \cdot \mathbf{W}_0^3 \cdot \mathbf{W}_2 = [0 \ 0 \ 0] [1 \ 0 \ 1] [1 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0], \quad \Delta R_1^3 = |\mathbf{W}_1^3| = 0;$$

$$\mathbf{W}_2^3 = \bar{\mathbf{W}}_2 \cdot \mathbf{W}_0^3 \cdot \mathbf{W}_1 = [0 \ 1 \ 1] [1 \ 0 \ 1] [1 \ 1 \ 1] = [0 \ 0 \ 1], \quad \Delta R_2^3 = |\mathbf{W}_2^3| = 1.$$

Так как  $\Delta R_q^3 = \Delta R_1^3 = 0$ , а  $\Delta R_2^3 = 1$ , то элемент  $v_3$  включается в первую часть. В результате первая часть полностью заполнена, поскольку по условию примера  $|V_1| = N_1 = 3$ . Таким образом, результатом решения задачи являются части  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  и  $V_2 = \{v_5, v_4\}$ , при этом вспомогательная матрица  $\mathbf{W}$  равна

$$\mathbf{W} = \begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \quad u_3 \\ V_1 \\ V_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для оценки качества разбиения рассчитывается значение критерия оптимальности  $Q$ , характеризующего число связей между частями. При расчете критерия  $Q$  вместо (5.9)



часто используется упрощенная формула, основанная на использовании вспомогательной матрицы  $\mathbf{W}$ , имеющая вид

$$Q = \sum_{j=1}^l (u_{\Sigma j} - 1), \quad (5.12)$$

где  $u_{\Sigma j}$  — сумма элементов (единиц)  $j$ -го столбца матрицы  $\mathbf{W}$ .

С использованием формулы (5.12) для нашего примера получаем

$$Q = (2 - 1) + (1 - 1) + (2 - 1) = 2.$$

Рассмотренный алгоритм компоновки применительно к схемам с многоконтактными элементами позволяет с помощью относительно простых операций разбить исходную схему на требуемое количество частей.

Необходимо заметить, что последовательные алгоритмы компоновки не всегда дают оптимальный результат. Для получения оптимальных решений применяют различного рода итерационные алгоритмы, в основе которых лежит перестановка вершин из одной части в другую до тех пор, пока не будет получено минимальное число внешних связей. В таких итерациях последовательный алгоритм служит для получения первого приближения или начального разбиения.

### 5.1.3. Последовательно-итерационный алгоритм

Принцип работы алгоритма заключается в перестановках вершин или групп вершин из одной части графа в другую до тех пор, пока не будет получено минимальное число связей между частями [3], [15].

В общем случае алгоритм состоит из двух этапов:

1) начальное «разрезание» графа приближено к оптимальному (на основе простых операций последовательно-го алгоритма), это вспомогательный этап;

2) основной этап, в ходе которого производится итерационное улучшение решения на основе парного или группового обмена вершин из различных частей.

Рассмотрим алгоритм на примере решения задачи разбиения графа  $G(V, R)$  с числом вершин (мощностью)  $|V|=8$  на  $n=3$  части, с количеством вершин в каждой части  $N_1=2$ ,  $N_2=3$  и  $N_3=3$  соответственно (рис. 5.4).

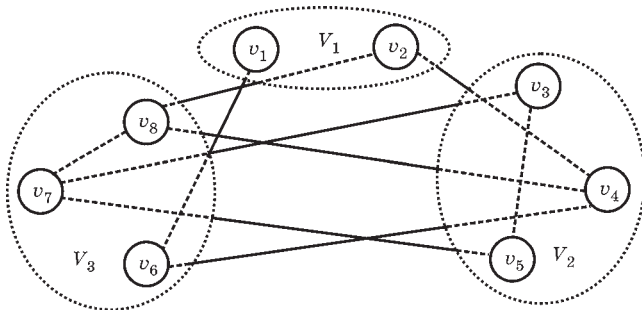


Рис. 5.4  
Исходный граф

Предварительно исходный граф  $G(V, R)$  представляется матрицей смежности  $S$  размерностью  $m \times m$ , где  $m = |V|$ . На первом этапе матрица  $S$  делится на  $n \times n$  блоков, по диагонали расположены блоки  $S_{ii}$ ,  $i = 1, n$  размерностью  $N_i \times N_i$ , соответствующие числу вершин каждой части разбиения. Эти блоки сверху вниз располагать по мере увеличения их размерности. В результате такого деления матрицы  $S$  на блоки, т. е.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix},$$

граф  $G(V, R)$  делится на части  $G_1(V_1, R_1)$ ,  $G_2(V_2, R_2)$  и  $G_3(V_3, R_3)$  с  $V_1 = \{v_1, v_2\}$ ,  $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$  и  $V_3 = \{v_6, v_7, v_8\}$  соответственно. Матрица  $S$  для графа, приведенного на рисунке 5.4 и с выделенными частями  $V_1, V_2, V_3$ , имеет вид

$$S = \begin{array}{c} v \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ V_1 \\ \\ \\ V_2 \\ \\ \\ \\ \\ V_3 \end{array}.$$

При решении задачи минимизируется число связей между частями. Разбиение графа в соответствии с критерием (5.1) тем лучше, чем больше связей сосредоточивается в диагональных блоках матрицы  $S$ . Поэтому вместо минимизации числа связей между частями можно максимизировать суммарное число ребер внутри всех частей графа  $G(V, R)$ . В результате критерий оптимальности примет вид:

$$Q = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{|R_{jj}|} \alpha_i^j, \quad \alpha_i^j = \begin{cases} 1, & r_i^j \in R_{jj}; \\ 0, & r_i^j \notin R_{jj}, \end{cases}$$

где  $r_i^j$  —  $i$ -е ребро  $j$ -й части;  $R_{jj}$  — подмножество «внутренних» ребер части  $G_j(V_j, R_j)$ ;  $l$  — число частей.

Для первоначального разбиения  $Q=7$ . На этом первый этап заканчивается. На втором этапе при каждой итерации выполняются следующие операции.

1. Подсчитываются перестановочные коэффициенты  $\Delta R(v_i, v_j)$  для пар вершин, принадлежащих частям  $G_p$  и  $G_q$ , характеризующие изменение числа соединительных ребер  $|R_{pq}|$  между частями после перестановки вершин  $v_i$  и  $v_j$ .

2. Отбираются пары вершин с положительным значением  $\Delta R$ , перестановка которых уменьшает число связей между частями, а из них выделяется та пара, для которой  $\Delta R$  максимально.

3. Производится перестановка выбранных вершин и строится новая матрица  $S$ .

Итерации заканчиваются, когда коэффициенты  $\Delta R(v_i, v_j) \leq 0$ .

Наиболее сложной частью алгоритма является расчет перестановочных коэффициентов  $\Delta R(v_i, v_j)$ , их оценка производится по формуле

$$\Delta R(v_i, v_j / v_i \in V_p, v_j \in V_q) = \Delta S_{qp}(v_i) + \Delta S_{pq}(v_j) - 2S_{ij};$$

$$\Delta S_{qp}(v_i) = \sum_{k \in J_q} S_{ik} - \sum_{k \in J_p} S_{ik}, \quad \Delta S_{pq}(v_j) = \sum_{k \in J_p} S_{jk} - \sum_{k \in J_q} S_{jk}, \quad (5.13)$$

где  $\Delta S_{qp}(v_i)$ ,  $\Delta S_{pq}(v_j)$  — числа связности вершин  $v_i$  и  $v_j$ ;  $J_p$ ,  $J_q$  — множества номеров вершин частей  $V_p$  и  $V_q$  соответственно.

Расчет  $\Delta R(v_i, v_j)$  рекомендуется проводить в следующей последовательности. Сначала определяется матрица  $\Delta R_1$  перестановочных коэффициентов для вершин первой части. Матрица имеет размерность  $N_1 \times (m - N_1)$  и для нашего примера имеет вид

$$\Delta R_1 = \begin{matrix} & v & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & & v & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \left[ \begin{matrix} r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} \\ r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & r_{28} \end{matrix} \right] & = & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \left[ \begin{matrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{matrix} \right], \end{matrix}$$

где в соответствии с (5.13):

$$\begin{aligned} r_{13} &= \Delta R(v_1, v_3 / v_1 \in V_1, v_3 \in V_2) = \Delta S_{21}(v_1) + \Delta S_{12}(v_3) - 2S_{13} = \\ &= \sum_{k \in \{3,4,5\}}^3 S_{1k} - \sum_{k \in \{1,2\}}^2 S_{1k} + \sum_{k \in \{1,2\}}^2 S_{3k} - \sum_{k \in \{3,4,5\}}^3 S_{3k} - 2S_{13} = \\ &= 0 - 0 + 0 - 1 - 0 = -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{26} &= \Delta R(v_2, v_6 / v_2 \in V_1, v_6 \in V_3) = \Delta S_{31}(v_2) + \Delta S_{13}(v_6) - 2S_{26} = \\ &= \sum_{k \in \{6,7,8\}}^3 S_{2k} - \sum_{k \in \{1,2\}}^2 S_{2k} + \sum_{k \in \{1,2\}}^2 S_{6k} - \sum_{k \in \{6,7,8\}}^3 S_{6k} - 2S_{26} = \\ &= 1 - 0 + 1 - 0 - 0 = 2. \end{aligned}$$

Аналогично рассмотренным по формуле (5.13) вычисляются и остальные коэффициенты матрицы  $\Delta R_1$ . Затем определяются пары вершин, имеющих положительный знак  $\Delta R$ . В нашем случае таковыми являются  $\{v_1, v_4\}$ ,  $\{v_1, v_8\}$  и  $\{v_2, v_6\}$ . Для пары вершин  $\{v_2, v_6\}$  значение  $\Delta R$  максимально, поэтому вершины  $v_2$  и  $v_6$  меняются местами. Разбиение графа  $G(V, R)$  после первой итерации приведено на рисунке 5.5.

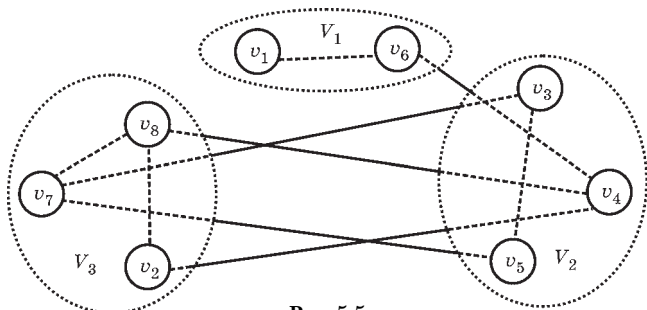


Рис. 5.5  
Граф после первой итерации

Перестроенная матрица смежности  $S_1$  имеет следующий вид:

$$S_1 = \begin{matrix} & v & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right. & \begin{matrix} V_1 \\ \\ \\ V_2 \\ \\ V_3 \end{matrix} \end{matrix}.$$

Как видно из рисунка 5.5 и матрицы  $S_1$ , после первой итерации число внешних связей уменьшилось на две, т. е. рассчитанный в соответствии с формулой (5.1) критерий оптимальности  $Q_1=5$ .

В случае отсутствия положительных компонентов матрицы  $\Delta R_1$  строится матрица  $\Delta R_2$  размерностью  $N_2 \times (m - (N_1 + N_2))$ , по которой определяется возможность перестановки вершин  $v_i \in V$  с вершинами  $v \in V \setminus V_1 \cup V_2$ . Если матрица  $\Delta R_2$  не содержит положительных компонентов, то переходят к рассмотрению  $\Delta R_3$  и т. д. Решение задачи заканчивается, когда все компоненты матрицы  $\Delta R_{n-1}$  отрицательны или равны нулю.

На второй итерации с использованием формулы (5.13) заполняется матрица коэффициентов  $\Delta R'_1$ , т. е.

$$\Delta R'_1 = \begin{matrix} & v & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 6 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} -2 & 0 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -3 \end{array} \right].$$

Так как все коэффициенты отрицательны или равны нулю, то переставлять вершины первой части с вершинами других частей нецелесообразно.

Для определения возможности перестановки вершин  $v \in V_2$  по формуле (5.13) вычисляются перестановочные коэффициенты и заполняется матрица  $\Delta R_2$  размерности  $N_2 \times (m - (N_1 + N_2))$ . В нашем случае

$$\Delta \mathbf{R}_2 = 4 \begin{matrix} v & 2 & 7 & 8 \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Максимальное значение  $\Delta \mathbf{R}_2$  имеет место для пары вершин  $\{v_4, v_7\}$ , поэтому в матрице смежности вершины  $v_4$  и  $v_7$  меняются местами. Полученная матрица смежности имеет вид

$$\mathbf{S}_2 = \begin{matrix} v & 1 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 6 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 7 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 8 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ V_1 \\ \\ V_2 \\ \\ V_3 \\ \\ \end{matrix}.$$

Разбиение графа после второй итерации приведено на рисунке 5.6, из которого легко видеть, что большая часть связей сосредоточена внутри частей, а количество внешних связей равно двум, т. е. согласно формуле (5.1) критерий оптимальности  $Q_2=2$ .

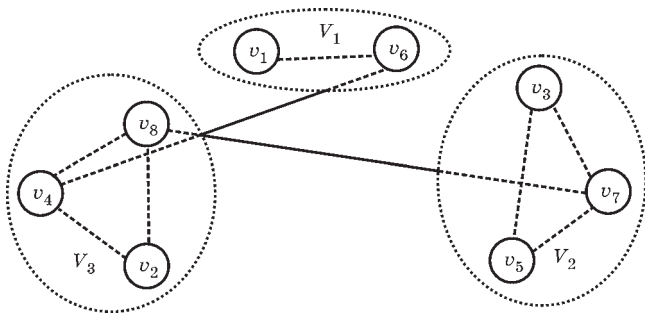


Рис. 5.6  
Граф после второй итерации

На третьей итерации матрица  $\Delta R'_2$ , заполненная в соответствии с (5.13), имеет вид

$$\Delta R'_2 = \begin{matrix} & v & 3 & 4 & 8 \\ & 3 & & & \\ 7 & & \begin{bmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -3 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} & & \\ & 5 & & & \end{matrix}.$$

Так как все элементы матрицы  $\Delta R'_2$  отрицательны, и других матриц  $\Delta R$  составлять не требуется, то на этом решение задачи разбиения графа на три части заканчивается.

#### 5.1.4. Генетические алгоритмы

В последние годы широкое применение для решения задач компоновки находят генетические алгоритмы.

В генетическом алгоритме важный смысл имеют структура хромосомы, способы рекомбинации и условия завершения эволюции. Хромосома играет роль вектора управляемых параметров, она состоит из генов и содержит информацию об их значениях. Выделяют хромосомы родителей и потомков. На начальном этапе решения задачи формируются хромосомы родителей и рассчитывается показатель, характеризующий предпочтительность каждой хромосомы. Затем отбираются «лучшие» родительские хромосомы для получения хромосом потомков. Операция рекомбинации (скрещивания, кроссовера) обычно производится по схеме (2; 2), т. е. два родителя — два потомка. Точка разрезания пары хромосом родителей может выбираться случайным образом. Затем оцениваются предпочтительности хромосом потомков и из них выбираются пары для рекомбинации. Процесс селекции завершается при достижении некоторого значения критерия или выполнения заранее задаваемого числа рекомбинаций.

Рассмотрим решение задачи компоновки методом комбинирования эвристик (*HCM*) — *Heuristics Combination Method* [3].

Задаются множества элементов  $V = \{v_i, i = \overline{1, m}\}$  и блоков  $B = \{b_j, j = \overline{1, n}\}$ , матрица связей между элементами  $C = \|c_{ik}\|_{m \times m}$  и матрица смежности  $S = \|s_{ik}\|_{m \times m}$ . Здесь  $s_{ik}$

показывает число связей между элементами  $v_i$  и  $v_k$ , а  $c_{ik}$  характеризует наличие соединения между элементами  $v_i$  и  $v_k$ , т. е.

$$c_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{между } v_i \text{ и } v_k \text{ нет соединения;} \\ 1, & \text{между } v_i \text{ и } v_k \text{ есть соединение.} \end{cases}$$

Требуется так разместить  $m$  конструктивов по  $n$  блокам, т. е. найти такую матрицу закрепления элементов за частями  $\mathbf{X} = \|x_{ji}\|_{n \times m}$ , чтобы число межблочных связей было минимально и выполнялись ограничения:

$$\sum_{j=1}^n x_{ji} = 1, \quad \sum_{i=1}^n x_{ji} \leq V_{\max},$$

где  $V_{\max}$  — максимальное число элементов, помещающихся в один блок;

$$x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если элемент } v_i \text{ включен в } B_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В процессе решения задачи формируются промежуточные матрицы:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}P_S = \|y_{ji}\|_{n \times m}; \quad \mathbf{W} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^T = \|w_{pq}\|_{n \times m},$$

где  $y_{ji}$  — число связей  $j$ -го блока с  $i$ -м конструктивом;  $w_{pq}$  — число связей между блоками  $B_p$  и  $B_q$ . Заметим, что значения вектор-столбца  $P_S$  берутся из матрицы  $\mathbf{S}$ .

Так как число межблочных связей равно общему числу связей минус число внутренних связей  $K$ , то в качестве целевой функции  $Q$  можно рассматривать суммарное число внутренних связей, которое надо максимизировать, т. е.

$$Q = K(X) = \sum_{p=1}^n w_{pp}(X) \rightarrow \max_X. \quad (5.14)$$

Таким образом, сформулированная задача представляет собой задачу дискретного математического программирования. При решении задач генетическим алгоритмом используется хромосома, в ней гены соот-



ветствуют  $m$  конструктивам, при этом значение  $i$ -го гена есть номер одного из  $n$  блоков, в который помещен  $i$ -й конструктив.

Общая задача компоновки разбивается на ряд подзадач. В каждой подзадаче выбирается один из еще не распределенных конструктивов (правило  $T_i$ ) и закрепляется за одним из блоков (правило  $Q_k$ ). Пара правил  $(T_i, Q_k)$  в данном случае называется эвристикой, которая обозначается  $\mathcal{E}_{ik}$ .

Назначаемые правила  $T_i, Q_k$  должны соответствовать общему критерию оптимальности, точнее, способствовать достижению оптимального значения критерия. В задаче компоновки для выбора очередного конструктива из числа нераспределенных можно использовать следующие правила:  $T_1$  — берется конструктив, которому соответствует элемент  $s_{ik}^{\max}$  матрицы  $S$ , т. е. имеющий наибольшее число связей;  $T_2$  — берется конструктив, имеющий максимальное число связей с другими конструктивами, для него сумма элементов в строке матрицы  $S$  максимальна;  $T_3$  — берется конструктив с максимальным числом связей с уже распределенными конструктивами, в матрице  $Y$  ему соответствует столбец с максимальной суммой элементов.

Для выбора блока можно использовать следующие правила:  $Q_1$  — минимально загруженный блок;  $Q_2$  — блок, конструктивы которого имеют максимальное число связей с  $i$ -м распределяемым конструктивом, т. е. блок с максимальным элементом  $y_{ji}$  текущей матрицы  $Y$ .

Для сформулированных правил используются шесть различных эвристик:

$$\mathcal{E}_{11}=(T_1, Q_1), \mathcal{E}_{21}=(T_2, Q_1), \dots, \mathcal{E}_{32}=(T_3, Q_2). \quad (5.15)$$

Покажем расчет матриц  $Y$  и  $W$  на численном примере с  $m=7$  и  $n=3$ . Исходный мультиграф приведен на рисунке 5.7.

В соответствии с мультиграфом  $G(V, R)$  (рис. 5.7) матрицы  $S$  и  $S$  равны

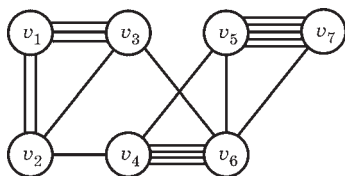


Рис. 5.7  
Исходный мультиграф

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 7 \\ 6 \end{matrix}.$$

Хромосома  $H$  имеет длину 7, номер гена соответствует номеру элемента, а значение гена — номеру блока, в который помещен элемент, т. е.

$$H: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline h_1 = j & h_2 = j+1 & h_3 = \dots & h_4 = \dots & h_5 = \dots & h_6 = \dots & h_7 = n \end{array},$$

$j = \overline{1, n}$ .

Пусть отобраны две особи родителей с хромосомами

$$P_1: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \quad \text{и} \quad P_2: \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}.$$

Этим родителям соответствуют следующие матрицы  $X$ :

$$X(P_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad X(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для расчета матрицы  $Y(P_i)$  в качестве вектора  $P_S$  используются соответствующие столбцы матрицы  $S$ . Тогда

$$Y(P_1) = X(P_1)P_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{s_1} \\ P_{s_2} \\ \vdots \\ P_{s_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 6 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $W(P_1)$  для рассчитанного значения  $Y(P_1)$  равна

$$W(P_1) = Y(P_1)X^T(P_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 9 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,  $K(X(P_1)) = w_{11} + w_{22} + w_{33} = 2$ .

Аналогично выполняются вычисления и для второго родителя, т. е.

$$Y(P_2) = X(P_2)P_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{s_1} \\ P_{s_2} \\ \vdots \\ P_{s_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix};$$

$$W(P_2) = Y(P_2)X^T(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix};$$

$$K(X(P_2)) = 2.$$

Используя эвристику  $\Theta_{11} = (S_1, Q_1)$ , запишем хромосому для третьего родителя. В результате получаем

$$P_3: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{и матрицу } \mathbf{X}(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(P_3) &= \mathbf{X}(P_3)P_S = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{s_1} \\ P_{s_2} \\ \vdots \\ P_{s_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbf{W}(P_3)$  для рассчитанного значения  $\mathbf{Y}(P_3)$  равна

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(P_3) &= \mathbf{Y}(P_3)\mathbf{X}^T(P_3) = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$K(\mathbf{X}(P_3)) = 10.$$

Для скрещивания отбираются родители  $P_1$  и  $P_3$ . Сечение отобранных родителей выполняется после третьего гена, т. е.

$$P_1: \boxed{1 \ 2 \ 3 \ : \ 1 \ 2 \ 3 \ 1} \quad P_3: \boxed{3 \ 2 \ 1 \ : \ 3 \ 1 \ 2 \ 1}.$$

В результате хромосомы двух потомков имеют вид:

$$C_1: \boxed{1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1} \quad C_2: \boxed{3 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1}.$$

Тогда для первого потомка:

$$\mathbf{X}(C_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}(C_1) &= \mathbf{X}(C_1)P_S = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{s_1} \\ P_{s_2} \\ \vdots \\ P_{s_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{W}(C_1) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$K(\mathbf{X}(C_1))=2.$$

Для второго потомка:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(C_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{Y}(C_2) &= \mathbf{X}(C_2)P_S = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{s_1} \\ P_{s_2} \\ \vdots \\ P_{s_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{W}(C_2) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 9 \\ 8 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{и } K(\mathbf{X}(C_2)) &= 0.
 \end{aligned}$$

После рекомбинации лучший результат  $K(\mathbf{X}(C_1))=2$  получен для первого потомка. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом примере наибольшее значение целевой функции  $Q$  получено для третьего родителя, т. е.  $Q=K(\mathbf{X}(P_3))=10$ , поэтому для дальнейших расчетов формируются новые родительские пары с учетом эвристики (5.15) и значений критерия (5.14) для потомков. Процесс вычисления прекращается, когда полученное максимальное значение  $K(\mathbf{X}(H))$  при некотором заданном числе последующих рекомбинаций не будет превышено. Соответствующая хромосома  $H$  и будет решением задачи.

### 5.1.5. Алгоритмы решения задач типизации и покрытия

Компоновка типовых блоков обычно сводится к так называемым задачам типизации и покрытия [15]. Типизация представляет собой разбиение схемы соединений (коммутационной схемы) блоков на части с минимальной номенклатурой частей разбиения или по максимуму однотипности используемых ячеек. Сокращение номенклатуры типовых элементов конструкции позволяет уменьшить затраты на дальнейшее проектирование. Под покрытием понимается представление принципиальной схемы ЭС типовыми конструктивными элементами, на которых она будет реализована, и связями между ними с учетом выбранных критериев оптимальности. Выделяют два вида задачи покрытия: с несвязанными элементами и функциональными ячейками. В первом случае решение сводится к определению необходимого числа ячеек для покрытия схемы с минимальной суммарной стоимостью и минимизации числа связей между ячейками. Во втором случае решается задача покрытия схемы заданным классом функциональных ячеек с минимизацией числа ячеек и суммарного числа связей между ними.

Рассмотрим математическую постановку задачи типизации. задается схема электрических соединений в виде графа  $G(V, R)$ , где  $V$  — число вершин графа,  $R$  — число связей между ними. Требуется определить набор в виде

множеств групп изоморфных подграфов  $\{G_i\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , где  $m$  — количество множеств изоморфных подграфов, которые удовлетворяют следующим ограничениям:

- если элемент графа  $G$  принадлежит  $G_i$ , то подграфы изоморфны, т. е. число их вершин одинаково и связи одного подграфа соответствуют связям другого подграфа, при этом множества их вершин не должны пересекаться;
- число вершин подграфа (т. е. мощность множества его вершин) не должна превышать некоторой заданной величины, т. е.  $|V_i| \leq n_{\text{зад}}$ ;
- число внешних связей подграфа не должно превышать заданного значения  $w_{\text{зад}}$ ;
- критерий оптимальности  $Q$  должен быть минимальным.

Рассмотрим порядок решения задачи типизации на примере получения однотипных наборов модулей для заданной схемы соединений, представленной графом  $G(V, R)$  (рис. 5.8).

Пусть требуемое количество типов вершин составляет  $t=3$  с весами  $t_1=2$ ,  $t_2=4$  и  $t_3=6$  для групп вершин  $\{v_1, v_4, v_7\}$ ,  $\{v_2, v_5, v_8\}$ ,  $\{v_3, v_6, v_9\}$  соответственно (цифры в скобках на рисунке 5.8).

Число вершин изоморфных подграфов не должно превышать величины  $n_{\text{зад}}=4$ , а число внешних связей составлять не более  $w_{\text{зад}}=3$ .

При решении задачи типизации наиболее часто используется алгоритм, предложенный А.М. Бершадским [15], [41]. Рассмотрим его этапы применительно к нашему примеру.

1. Записывается матрица смежности, в которой дополнительными столбцами приведены значения степеней  $s(v_i)$  и весов  $t(v_i)$  для соответствующих вершин:

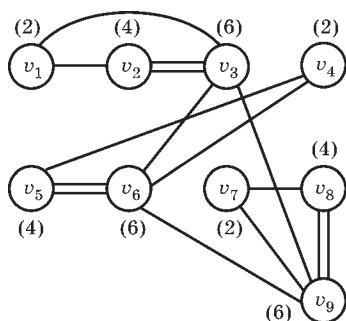


Рис. 5.8  
Исходная схема в виде графа

	$v$	1	2	3	4	5	6	7	8	$s(v_i)$	$t(v_i)$	
1	$S=5$	0	1	1	0	0	0	0	0	2	2	
2		1	0	2	0	0	0	0	0	0	3	4
3		1	2	0	0	0	1	0	0	1	5	6
4		0	0	0	0	1	1	0	0	0	2	2
5		0	0	0	1	0	2	0	0	0	3	4
6		0	0	1	1	2	0	0	0	1	5	6
7		0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2
8		0	0	0	0	0	0	1	0	2	3	4
9		0	0	1	0	0	1	1	2	0	5	6

2. Определяются группы равноинвариантных, т. е. имеющих одинаковую степень и тип вершин:

$$V_1^0 = \{v_1, v_4, v_7\}; \quad V_2^0 = \{v_2, v_5, v_8\}; \quad V_3^0 = \{v_3, v_6, v_9\}.$$

3. Составляются группы изоморфных подграфов  $G_i$ , содержащих по две вершины. Для этого рассматриваются возможные сочетания пар вершин из разных подгрупп и составляются матрицы смежности:

$$S_1^1 \begin{pmatrix} V_1^0 \\ V_2^0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} v & 1 & 4 & 7 \\ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}; \quad S_2^1 \begin{pmatrix} V_1^0 \\ V_3^0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} v & 1 & 4 & 7 \\ 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix};$$

$$S_3^1 \begin{pmatrix} V_2^0 \\ V_3^0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} v & 2 & 5 & 8 \\ 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}.$$

Тогда в результате объединения на первом шаге алгоритма получаем три группы изоморфных подграфов:

$$G_1^1 = \{1-2; 4-5; 7-8\};$$

$$G_2^1 = \{1-3; 4-6; 7-9\};$$

$$G_3^1 = \{2-3; 5-6; 8-9\}.$$



4. Определяется множество вершин  $V_i^1$ , не входящих в эти подграфы, т. е.

$$V_1^1 = \{v_3, v_6, v_9\}; \quad V_2^1 = \{v_2, v_5, v_8\}; \quad V_3^1 = \{v_1, v_4, v_7\}.$$

5. Проводится поиск в множествах  $V_i^1$  равноинвариантных вершин. Если они есть, то дополнительное деление не проводится. В случае их отсутствия оставшиеся вершины разбиваются на равноинвариантные и т. д. В случае нашего примера в полученных множествах  $V_1^1 - V_3^1$  все вершины равноинвариантны, следовательно, осуществляется возврат к п. 3 алгоритма. Тогда

$$S_1^2 \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} v & 3 & 6 & 9 \\ 2 & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad S_2^2 \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_3^1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} v & 3 & 6 & 9 \\ 1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$S_3^2 \begin{pmatrix} V_2^1 \\ V_3^1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} v & 2 & 5 & 8 \\ 1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Следовательно, в результате объединения на втором шаге алгоритма получаем три группы изоморфных подграфов, содержащих по три вершины:

$$G_1^2 = \{1-2-3; \quad 4-5-6; \quad 7-8-9\};$$

$$G_2^1 = \{1-3-2; \quad 4-6-5; \quad 7-9-8\};$$

$$G_3^1 = \{2-3-1; \quad 5-6-4; \quad 8-9-7\}.$$

Так как свободные вершины, не входящие в данные подграфы, отсутствуют, то решение задачи на этом заканчивается. В результате для нашего примера определены три набора модулей с тремя типовыми элементами в каждом для реализации коммутационной схемы, что соответствует заданным в условиях задачи ограничениям.

Задача типизации приобретает особую актуальность при решении проблемы снижения эксплуатационных

расходов для спроектированных конструкций ЭС путем минимизации числа типовых элементов замены.

Не менее важной задачей в общей проблеме компоновки является покрытие, т. е. преобразование электрических схем с использованием как стандартных ЭРИ, так и модулей, полученных в результате решения задачи типизации [15]. Другими словами, покрытие представляет собой процедуру практической реализации принципиальной схемы ЭС с использованием типовых элементов конструкции. Конечная цель покрытия — выбор оптимальной элементной базы для объекта проектирования.

Рассмотрим математическую постановку задачи. Дана схема электрическая принципиальная, представленная в виде множества элементов  $D = \{d_i\}$ ,  $i = 1, n$  с указанием типа каждого элемента  $t(d_i)$ , где  $n$  — количество элементов. Состав схемы описывается вектором  $M = (m_1, \dots, m_t)$ ,  $t = 1, e$ , где  $m_t$  — число элементов  $t$ -го типа, а  $e$  — количество типов. Задан набор ячеек  $C = \{C_j\}$ ,  $j = 1, m$ , с оценочной стоимостью ячеек каждого типа  $P_j$ , где  $j$  — число ячеек. Состав ячеек набора описывается матрицей  $R = \|r_{jt}\|$ , элемент которой показывает количество элементов типа  $t$  в ячейке  $C_j$ . Требуется определить необходимое количество ячеек каждого типа для покрытия функциональной схемы. Критерием оптимальности часто служит минимальная суммарная стоимость всех ячеек

$$Q = \sum_{j=1}^m P_j |C_j| \rightarrow \min, \quad (5.16)$$

где  $|C_j|$  — число ячеек типа  $C_j$ , использованных для реализации схемы.

Такого рода задачи относятся к классу задач целочисленного программирования и при большой размерности их решение очень громоздко. Поэтому на практике часто используются эвристические алгоритмы, которые хотя и не гарантируют точного результата, но позволяют достаточно быстро решить задачу. Наиболее распространенным является алгоритм В. А. Селютина, основанный на предположении, что каждый элемент схемы реализуется только соответствующим элементом, содержащимся в ячейке [15], [42]. Рассмотрим основные этапы этого алгоритма.

1. Ячейки упорядочиваются по степени возрастания стоимости, т. е.  $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_j$  и производится выбор ячеек первого типа.

2. Определяется условно минимальное число  $A_j$  ячеек очередного типа:

$$A_j = \min(A_{jt}); \quad A_{jt} = \left[ \text{Int} \left( \frac{m_t}{r_{jt}} \right) \right]. \quad (5.17)$$

3. Рассматривается вектор непокрытых элементов схемы по формуле

$$M_j = M_{j-1} - A_j R_j, \quad (5.18)$$

где  $R_j$  — вектор-строка матрицы  $\mathbf{R}$ . Если полученное значение  $M_j > 0$ , то осуществляется возврат на п. 2.

4. Производится определение минимального числа ячеек типа  $C_j$ , т. е.

$$|C_j| = \sum_{j=1}^{\gamma} A_j, \quad (5.19)$$

где  $\gamma$  — число проведенных итераций.

Рассмотрим этот алгоритм на примере решения задачи покрытия.

Пусть задана схема (рис. 5.9), состоящая из логических элементов типов  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$ , показанных на рисунке 5.10а. Дан набор ячеек  $C = (C_1, C_2, C_3)$ , состоящих из элементов типов  $C_1 = \{t_2, t_1, t_1\}$ ,  $C_2 = \{t_2, t_3\}$  и  $C_3 = \{t_1, t_4\}$  стоимостью 2, 3 и 5 соответственно (рис. 5.10б). Требуется определить количество ячеек каждого типа для покрытия принципиальной схемы.

На основании исходных данных формируется вектор количества элементов указанных типов вида  $M_0 = [5; 4; 1; 1]$ . В соответствии с заданным набором ячеек составляется матрица

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

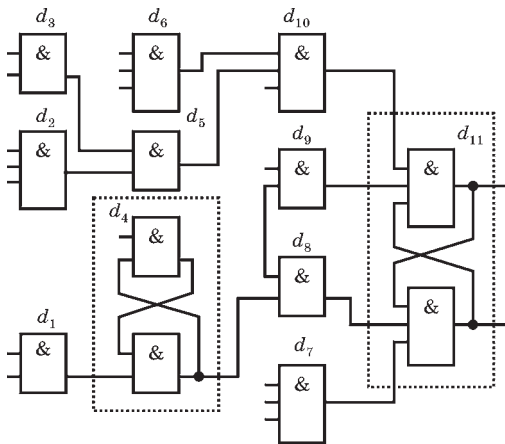


Рис. 5.9  
Исходная схема  
устройства

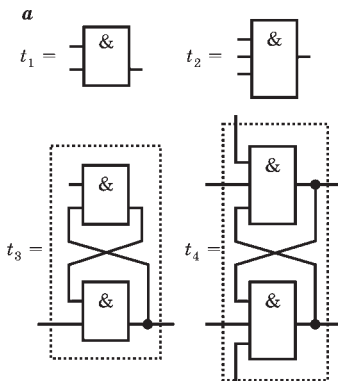
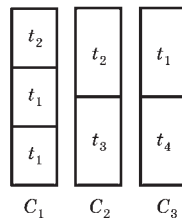


Рис. 5.10  
Типы логических  
элементов (а) и набор  
ячеек (б)



Решение задачи предполагает выполнение ряда действий в соответствии с рассмотренным алгоритмом Селютина.

1. Все ячейки упорядочиваются по степени возрастания их стоимости: так как стоимости  $P_1 < P_2 < P_3$ , то и ячейки располагаются в порядке  $C_1, C_2, C_3$ .

2. По формуле (5.17) определяется условно минимальное число  $A_j$  ячеек очередного типа  $C_j$  при  $j=1$ , т. е.

$$A_{11} = \text{Int}\left(\frac{m_1}{r_{11}}\right) = \text{Int}\left(\frac{5}{2}\right) = 2; \quad A_{12} = \text{Int}\left(\frac{m_2}{r_{12}}\right) = \text{Int}\left(\frac{4}{1}\right) = 4.$$

Тогда

$$A_1 = \min\{A_{11}, A_{12}\} = 2.$$

3. Рассчитывается вектор непокрытых элементов схемы по (5.18):

$$M_1 = M_0 - A_1 R_1 = [5; 4; 1; 1] - 2 \cdot [2; 1; 0; 0] = [1; 2; 1; 1].$$

Поскольку значение  $M_1 > 0$ , то согласно алгоритму осуществляется возврат к п. 2 и начинается вторая итерация.

Повторно определяется условно минимальное значение  $A_j$  при  $j = 2$ :

$$A_{22} = \text{Int}\left(\frac{m_2}{r_{22}}\right) = \text{Int}\left(\frac{2}{1}\right) = 2; \quad A_{23} = \text{Int}\left(\frac{m_3}{r_{23}}\right) = \text{Int}\left(\frac{1}{1}\right) = 1.$$

Следовательно,

$$A_2 = \min\{A_{22}, A_{23}\} = 1.$$

Необходимо отметить, что значения  $m_2$  и  $m_3$  берутся из вектор-строки  $M_1$  п. 3 первой итерации.

Заново рассчитывается вектор непокрытых элементов схемы по (5.18):

$$M_2 = M_1 - A_2 R_2 = [1; 2; 1; 1] - 1 \cdot [0; 1; 1; 0] = [1; 1; 0; 1].$$

Так как для рассматриваемого примера  $M_2 > 0$ , то опять осуществляется возврат на п. 2 и начинается третья итерация и т. д. до тех пор, пока элементы вектор-строки  $M_j$  не станут равными нулю или не примут отрицательные значения. В этом случае осуществляется переход на п. 4 алгоритма.

Выполним третью итерацию для ячейки  $C_3$ . Пропущенные промежуточные расчеты, покажем конечный результат:  $A_{31} = 1$ ,  $A_{34} = 1$ , поэтому  $A_3 = 1$  и  $M_3 = [0; 1; 0; 0]$ .

Последняя, четвертая итерация для ячейки  $C_1$  приведет к окончанию процесса:  $A_{12} = A_1 = 1$  и  $M_4 = [0; 0; 0; 0]$ .

4. Завершающим этапом алгоритма является оценка минимального числа ячеек типа  $C_j$  с использованием формулы (5.19). Для нашего примера  $|C_1| = 3$ ,  $|C_2| = 1$  и  $|C_3| = 1$ . Видно, что избыточность покрытия равна двум неиспользованным элементам типа  $t_1$ .

Решение задачи заканчивается определением суммарной стоимости всех ячеек с использованием формулы (5.16).

Необходимо отметить, что избыточность покрытия — неизбежный атрибут большинства получаемых результатов. Этот недостаток вызван двумя основными причинами. Первая объясняется неточностью самого алгоритма, а вторая причина связана со спецификой решаемой задачи, поскольку состав элементной базы ячейки заранее определен, и чем больше разнотипных элементов содержит ячейка, тем сложнее реализовать оптимальное покрытие схемы. Первая причина легко снимается применением более точных алгоритмов, а вторая устраняется использованием более рационального состава элементной базы ячейки, т. е. более качественным решением задачи типизации.

## 5.2. ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ

Размещение рассматривается как проектная процедура, заключающаяся в определении расположения заданного множества элементов в монтажно-коммутационном пространстве. При конструировании ЭС решаются задачи размещения микросхем на печатной плате, компонентов в кристалле интегральных схем, типовых элементов замены в панели, панелей в стойке и т. п. Проектирование печатного узла связано с размещением не только электронных компонентов в МКП, но и распределением электрических связей по слоям платы (см. рис. 4.24). Качество решения задачи размещения определяет повышение надежности, уменьшение размеров конструктивных единиц и длины соединений, минимизацию взаимных наводок, задержек сигналов и т. д. От результатов ее решения зависит эффективность последующей задачи — трассировки [3], [6], [15], [43], [44].

Исходными данными для решения задачи размещения являются множество конструкционных элементов  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , множество связей между ними  $R = \{r_1, \dots, r_p\}$  и множество установочных мест (позиций) в МКП  $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ , причем каждый элемент может занимать

не более одного посадочного места, т. е.  $m \geq n$ . Указываются конфигурация МКП, ограничения на расположение отдельных элементов по установочным местам и относительно друг друга с учетом тепловой и электромагнитной совместимости, а также их влияния на механические характеристики платы (блока). Схема соединений элементов может задаваться графом  $G(V, R)$ , матрицей цепей или в виде табличного списка. Кроме того, задается критерий оптимальности  $Q$ .

Математически задача размещения формулируется следующим образом. Для заданных  $G(V, R)$  и  $T$  требуется найти такое отображение графа схемы  $G$  на множество установочных мест  $T$ , чтобы выполнялись необходимые ограничения и обеспечивался минимум выбранного критерия оптимальности  $Q$ .

Наиболее часто в задачах размещения минимизируется суммарная длина электрических соединений:

$$Q_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m l_{ij} s_{ij}, \quad (5.20)$$

суммарное число внутрисхемных пересечений:

$$Q_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{|R|} p(r_{ij}), \quad (5.21)$$

число соединений, длина которых превышает задаваемую величину  $l_3$ :

$$Q_3 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m l'_{ij} s_{ij}, \quad l'_{ij} \geq l_3, \quad (5.22)$$

где  $l_{ij}$  — расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м установочными местами на МКП, в которых расположены соответствующие конструктивные элементы, определяемое по формулам (3.13) или (3.14);  $l'_{ij}$  — расстояния  $l_{ij}$ , превышающие  $l_3$ ;  $s_{ij}$  — число кратных связей (ребер графа  $G$ ), соединяющих элементы в  $i$ -м и  $j$ -м установочных местах;  $p(r_{ij})$  — число пересечений ребра  $r_{ij}$  графа  $G$ .

Для совместного учета нескольких частных критериев при размещении элементов можно использовать некий обобщенный критерий, например

$$Q_4 = c_1 Q_1 + c_2 Q_2 + \dots + c_i Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.23)$$

где  $c_i$  — весовой коэффициент, учитывающий важность  $i$ -го критерия.

Для решения задач размещения разработано множество разнообразных алгоритмов, таких как различного рода последовательные, итерационные алгоритмы и их модификации, а также алгоритмы, основанные на методах случайного поиска оптимального результата. Рассмотрим наиболее известные из них.

### 5.2.1. Последовательно-итерационный алгоритм размещения

Последовательно-итерационный алгоритм размещения состоит из двух этапов. На первом (последовательном) этапе поочередно заполняются установочные места элементами с учетом числа связей между ними. Этап заканчивается, когда все элементы размещены. На втором (итерационном) этапе производится перестановка элементов с целью минимизации выбранного критерия оптимальности (5.20)–(5.22) или обобщенного критерия (5.23) [3], [15].

На последовательном этапе размещение производится с использованием коэффициента связности  $K(v_i)$  элемента  $v_i$  с ранее размещенными элементами, определяемого по формуле

$$\begin{aligned} K(v_i) &= \rho(v_i \subset V_{\text{разм}}) - \rho(v_i \subset V_{\text{ост}}) = \\ &= 2\rho(v_i \subset V_{\text{разм}}) - \rho = 2 \sum_{j \in J_{\text{разм}}} S_{ij} - \rho(v_i), \end{aligned} \quad (5.24)$$

где  $\rho(v_i \subset V_{\text{разм}}) = \sum_{j \in J_{\text{разм}}} S_{ij}$  — число связей элемента  $v_i$  с подмножеством размещенных вершин  $V_{\text{разм}}$ ;  $\rho(v_i \subset V_{\text{ост}})$  — число связей элемента  $v_i$  с подмножеством оставшихся вершин  $V_{\text{ост}}$ ;  $J_{\text{разм}}$  — множество номеров размещенных элементов;  $\rho(v_i)$  — степень вершины  $v_i$ .

Цель последовательного этапа — получение первоначального размещения элементов в МКП, которое рассма-



тривается как первое приближение итерационной части алгоритма.

Заполнение МКП осуществляется в следующем порядке. Вначале размещаются закрепленные за соответствующими установочными местами элементы, затем в свободную позицию размещается один (первый) конструктивный элемент, а далее производится размещение элементов с максимальными значениями коэффициента связности в очередных свободных позициях МКП. В результате такого последовательного размещения элементов формируется массив пар  $\{(v_i, t_k), i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}\}$ , для которого рассчитывают значение критерия по формулам (5.20)–(5.22).

На втором этапе на каждой итерации выбирается элемент с максимальным значением средней длины связей; определяется номер посадочного места, на которое его желательно разместить, и выбирается наилучший вариант для перестановки. Следовательно, идея итерационной части заключается в улучшении размещения, полученного на предыдущем шаге путем перестановок элементов.

Рассмотрим решение задачи размещения данным алгоритмом на примере. Требуется разместить элементы схемы, мультиграф которой  $G(V, R)$  приведен на рисунке 5.11 с числом вершин  $n = 9$  в монтажно-коммутационное

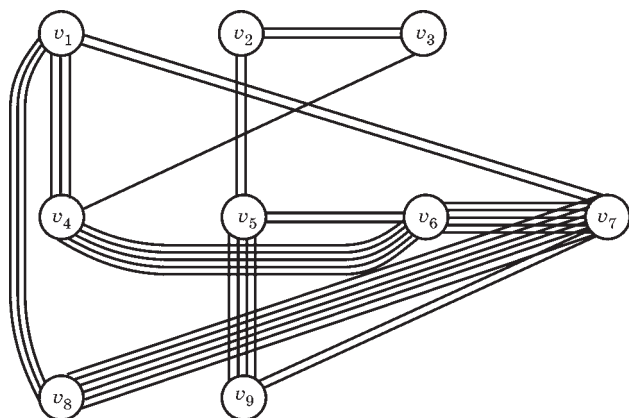


Рис. 5.11  
Исходный мультиграф

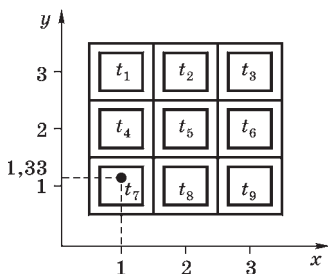


Рис. 5.12  
Монтажно-коммутационное пространство

пространство, показанное на рисунке 5.12 с количеством посадочных мест  $m=n=9$ .

Решение задачи начинается с представления исходного мультиграфа матрицей смежности  $S$ . Рядом с матрицей дополнительные столбцы приведены значения степеней соответствующих вершин  $\rho(v_i)$  и коэффициентов связностей  $K^j(v_i)$ :

	$v$	1	2	3	4	5	6	7	8	$\rho(v_i)$	$K^1(v_i)$	$K^2(v_i)$	$K^3(v_i)$	$K^4(v_i)$	$K^5(v_i)$	
$S=5$	1	0	0	0	3	0	0	2	3	0	8	-	-	-	-	-
	2	0	0	2	0	2	0	0	0	0	4	-4	0	0	0	-
	3	0	2	0	1	0	0	0	0	0	3	-3	-	-	-	-
	4	3	0	1	0	0	5	0	0	0	9	-3	-	-	-	-
	5	0	2	0	0	0	2	0	0	4	8	-8	-8	-8	-4	0
	6	0	0	0	5	2	0	5	0	0	12	-12	-2	8	-	-
	7	2	0	0	0	0	5	0	6	2	15	-11	1	-	-	-
	8	3	0	0	0	0	0	6	0	0	9	-3	-	-	-	-
	9	0	0	0	0	4	0	2	0	0	6	-6	-6	-2	-2	-2

В условии задачи не задано закрепление отдельных вершин за конкретными посадочными местами, поэтому определяем вершину  $v_1$  в позицию  $t_1$ , а далее последовательно размещаем остальные элементы. Для этого вычисляем коэффициенты связности  $K(v_i)$  элементов  $v_2, \dots, v_9$  с размещенным элементом  $v_1$  по формуле (5.24).

Так, для элемента  $v_2$  коэффициент связности:

$$K^1(v_2) = 2S_{21} - \rho(v_2) = 0 - 4 = -4,$$

для элемента  $v_3$ :

$$K^1(v_3) = 2S_{31} - \rho(v_3) = 0 - 3 = -3 \text{ и т. д.}$$

Максимальное значение коэффициента связности получено для элементов  $v_3, v_4$  и  $v_8$ , поэтому их целесообразно разместить в соседние с элементом  $v_1$  ячейки. Остались неразмещенными элементы  $v_2, v_5, v_6, v_7, v_9$ , и для них ана-

логично определяются коэффициенты связности с уже размещенными элементами  $v_1, v_3, v_4, v_8$ , т. е.

$$K^2(v_2) = 2 \cdot (S_{21} + S_{23} + S_{24} + S_{28}) - \rho(v_2) = 4 - 4 = 0;$$

$$K^2(v_5) = 2 \cdot (S_{51} + S_{53} + S_{54} + S_{58}) - \rho(v_5) = 0 - 8 = -8$$

и т. д.

Максимальную связность с  $v_1, v_3, v_4, v_8$  имеет элемент  $v_7$ , и его размещаем в очередную свободную позицию МКП и т. д. На этом последовательный этап алгоритма заканчивается, а его результатом является первоначальное размещение элементов, которое показано на рисунке 5.13.

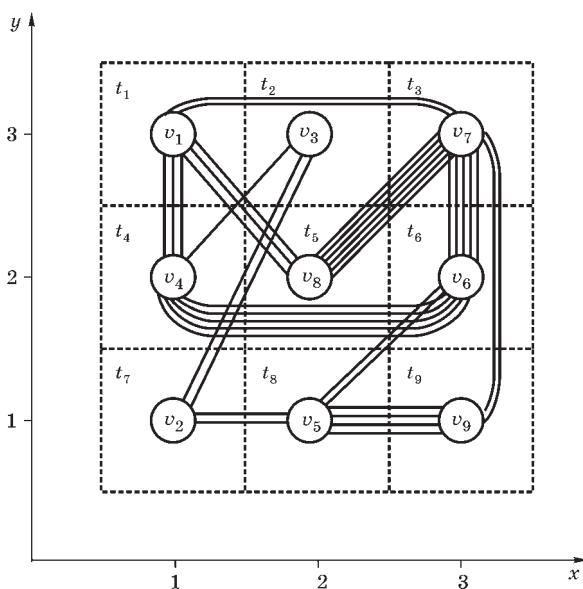


Рис. 5.13

Размещение элементов после последовательного этапа

Значение выбранного критерия оптимальности (минимум суммарной длины соединений), определяемое по формуле (5.20), составляет  $Q=62$ .

Итерационная часть алгоритма начинается с расчета средней длины связи вершины  $v_i$ , расположенной в установочном месте  $t_k$  МКП по формуле

$$L_{v_i}(t_k) = \frac{1}{\rho(v_i)} \sum_{j=1}^n S_{ij} l_{k(i),r(j)}, \quad (5.25)$$

где  $l_{kr}$  — значения длины между  $k$ -й и  $r$ -й позициями монтажного пространства, в которых содержатся вершины  $v_i$  и  $v_j$  соответственно, определяется по формуле (3.13) или (3.14). В дальнейших расчетах рассматриваемого примера для определения длин будет использоваться формула (3.13).

Тогда с использованием формулы (5.25) для первого элемента  $v_1$ , размещенного в позиции  $t_1$ , средняя длина связей будет составлять

$$\begin{aligned} L_{v_1}(t_1) &= \frac{1}{\rho(v_1)} \sum_{j=1}^9 S_{1j} l_{1(1),r(j)} = \\ &= \frac{1}{8} (S_{14} \cdot l_{1(1),4(4)} + S_{17} \cdot l_{1(1),3(7)} + S_{18} \cdot l_{1(1),5(8)}) = \\ &= \frac{1}{8} (3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = 1,63. \end{aligned}$$

Для элемента  $v_2$ , размещенного в посадочном месте  $t_7$ , средняя длина связей составит

$$\begin{aligned} L_{v_2}(t_7) &= \frac{1}{\rho(v_2)} \sum_{j=1}^9 S_{2j} l_{7(2),r(j)} = \frac{1}{4} (S_{23} \cdot l_{7(2),2(3)} + S_{25} \cdot l_{7(2),8(5)}) = \\ &= \frac{1}{4} (2 \cdot 3 + 2 \cdot 1) = 2. \end{aligned}$$

Аналогично определяются средние длины связей для остальных элементов:  $L_{v_3}(t_2) = 2,67$ ;  $L_{v_4}(t_4) = 1,67$ ;  $L_{v_5}(t_8) = 1,25$ ;  $L_{v_6}(t_6) = 1,58$ ;  $L_{v_7}(t_3) = 1,67$ ;  $L_{v_8}(t_5) = 2$ ;  $L_{v_9}(t_9) = 1,33$ .

Из всех полученных значений  $L_{v_i}(t_k)$  определяем максимальное. Если для нескольких элементов получено одинаковое максимальное значение  $L_{v_i}(t_k)$ , то выбирается значение для любого из этих элементов. В нашем примере это  $L_{v_3}(t_2)$ . Поэтому для элемента  $v_3$  определяем его предпочтительную позицию на основе расчета координат условного «центра тяжести»:

$$\begin{aligned}
 x_c(v_\mu) &= \frac{1}{\rho(v_\mu)} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq \mu}}^n S_{\mu j} x_{r(j)}; \\
 y_c(v_\mu) &= \frac{1}{\rho(v_\mu)} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq \mu}}^n S_{\mu j} y_{r(j)},
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

где  $v_\mu$  — элемент с максимальным значением  $L_{v_i}(t_k)$ ;  $S_{\mu j}$  — число связей между элементами  $v_\mu$  и  $v_j$ ;  $x_{r(j)}$ ,  $y_{r(i)}$  — координаты  $r$ -й позиции монтажного пространства, в которой находится элемент  $v_j$ .

Другими словами, средняя длина связей будет минимальна при расположении элемента  $v_3$  в координатах «центра тяжести». Тогда с использованием формулы (5.26) для элемента  $v_3$  получим

$$\begin{aligned}
 x_c(v_3) &= \frac{1}{\rho(v_3)} \sum_{j=1}^9 S_{3j} x_{r(j)} = \frac{1}{3} (S_{32} \cdot x_{7(2)} + S_{34} \cdot x_{4(4)}) = \\
 &= \frac{1}{3} (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 1; \\
 y_c(v_3) &= \frac{1}{\rho(v_3)} \sum_{j=1}^9 S_{3j} y_{r(j)} = \frac{1}{3} (S_{32} \cdot y_{7(2)} + S_{34} \cdot y_{4(4)}) = \\
 &= \frac{1}{3} (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = 1,33.
 \end{aligned}$$

Положение «центра тяжести» для элемента  $v_3$  отмечено на рисунке 5.12. Из позиций, расположенных в его окрестности, формируется подмножество посадочных мест  $T_c = \{t_4, t_7\}$  с элементами  $V_c = \{v_4, v_2\}$ . Для определения, какой элемент целесообразно поменять местами с отобранным  $v_\mu$ , рассчитывается средняя длина связи элемента  $v_\mu$  при перемещении его из установочного места  $t_k$  в позицию  $t_c \in T_c$ , в которой до этого был элемент  $v_c \in V_c$  по формуле

$$L_{v_\mu}(t_{c(c)}) = \frac{1}{\rho(v_\mu)} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq c}}^n S_{\mu j} l_{c(\mu), r(j)} + S_{\mu c} l_{c(\mu), k(c)} \right), \tag{5.27}$$

где  $l_{c(\mu), r(j)}$  — значение длины связи между посадочным местом  $t_c$  в предположении размещения в нем элемента  $v_\mu$  и  $r$ -й позицией монтажного пространства с размещенным в ней элементом  $v_j$ ;  $S_{\mu c}$  — число связей между элементами  $v_\mu$  и  $v_c$ ;  $l_{c(\mu), k(c)}$  — значение длины связи между посадочным местом  $t_c$  в предположении размещения в нем элемента  $v_\mu$  и  $k$ -й позицией монтажного пространства в предположении размещения в ней элемента  $v_c$ .

Для рассматриваемого примера в соответствии с формулой (5.27) и в предположении поочередного обмена местоположениями элемента  $v_3$  с элементами подмножества  $V_c$  имеем

$$L_{v_3}(t_{4(4)}) = \frac{1}{\rho(v_3)} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 4}}^9 S_{3j} l_{4(3), r(j)} + S_{34} l_{4(3), 2(4)} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (S_{32} \cdot l_{4(3), 7(2)} + S_{34} \cdot l_{4(3), 2(4)}) = 1, \mathbf{33};$$

$$L_{v_3}(t_{7(2)}) = \frac{1}{\rho(v_3)} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^9 S_{3j} l_{7(3), r(j)} + S_{32} l_{7(3), 2(2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (S_{34} \cdot l_{7(3), 4(4)} + S_{32} \cdot l_{7(3), 2(2)}) = 2, \mathbf{33}.$$

Аналогично вычисляются и средние длины  $L_{v_c}(t_6)$  для элементов  $v_c \in V_c$ , если их поместить на позицию  $t_2$ , занимаемую элементом  $v_3$ , т. е.

$$L_{v_4}(t_{2(3)}) = \frac{1}{\rho(v_4)} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^9 S_{4j} l_{2(4), r(j)} + S_{43} l_{2(4), 4(3)} \right) =$$

$$= \frac{1}{9} (S_{41} l_{2(4), 1(1)} + S_{46} l_{2(4), 6(6)} + S_{43} l_{2(4), 4(3)}) = 1, \mathbf{67};$$

$$L_{v_2}(t_{2(3)}) = \frac{1}{\rho(v_2)} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^9 S_{2j} l_{2(2), r(j)} + S_{23} l_{2(2), 7(3)} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} (S_{25} l_{2(2), 8(5)} + S_{23} l_{2(2), 7(3)}) = 2, \mathbf{5}.$$

Оцениваются изменения средней длины связей от перестановки элементов  $v_\mu$  и  $v_c \in V_c$  с использованием формулы

$$\Delta L(v_\mu, v_c) = (L_{v_\mu}(t_k) - L_{v_\mu}(t_{c(c)})) + (L_{v_c}(t_c) - L_{v_c}(t_{k(\mu)})). \quad (5.28)$$

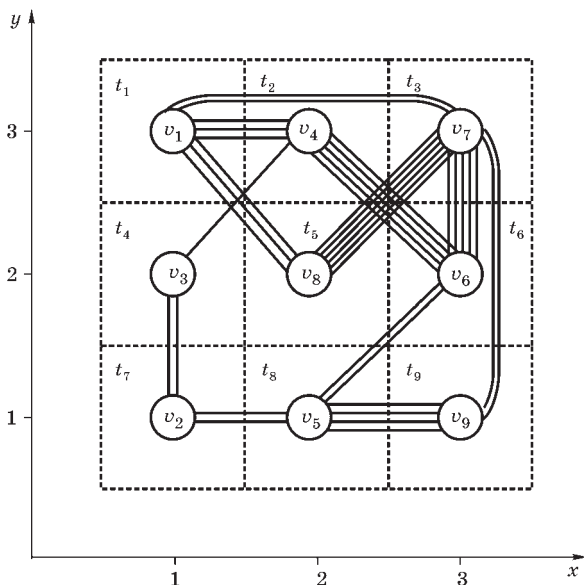
Тогда для нашего примера в соответствии с (5.28) имеем:

$$\Delta L(v_3, v_4) = (L_{v_3}(t_2) - L_{v_3}(t_{4(4)})) + (L_{v_4}(t_4) - L_{v_4}(t_{2(3)})) = 1,34;$$

$$\Delta L(v_3, v_2) = (L_{v_3}(t_2) - L_{v_3}(t_{7(2)})) + (L_{v_2}(t_7) - L_{v_2}(t_{2(3)})) = -0,16.$$

Так как максимальный выигрыш достигается от перестановки элементов  $v_3$  и  $v_4$ , то определяем  $v_3$  в установочное место  $t_4$ , а элемент  $v_4$  в  $t_2$ . На этом первая итерация заканчивается.

Полученное размещение показано на рисунке 5.14. Суммарная длина соединений, определяемая по формуле (5.20) составляет  $Q=58$ , т. е. значение критерия уменьшилось на четыре единицы.



**Рис. 5.14**  
Размещение элементов после первой итерации

Итерации заканчиваются, когда средние длины связей для всех элементов будут меньше  $2\Delta l$  (здесь  $\Delta l$  — расстояние между соседними позициями) или отсутствуют перестановки, приводящие к минимизации критерия (5.20).

Достоинством рассмотренного алгоритма является гарантированное получение оптимального размещения элементов схемы, а его недостатком — большое количество трудоемких расчетов, связанных с определением на каждой итерации пары перестанавливаемых элементов, поэтому на практике часто используют различного рода эвристические алгоритмы, хотя и не всегда обеспечивающие оптимальный результат, но отличающиеся относительной простотой и высоким быстродействием.

### 5.2.2. Эвристический алгоритм, основанный на методе выделения «длинных» и «коротких» ребер

Основная идея алгоритма заключается в том, что после начального размещения в виде графа  $G(V, R)$  для каждой вершины  $v_i \in V$  множество  $R_i$  инцидентных ребер разбивается на подмножества  $R'_i$  «коротких» и  $R''_i$  «длинных» ребер [3]. На основе такого деления определяются пары вершин, перестановки которых приводят к уменьшению суммарной длины связей, т. е. критерия (5.20). Деление ребер на «короткие» и «длинные» производится с помощью граничной длины  $l_{гр}$ . Если длина связи  $l_{ij}$  между вершинами  $v_i$  и  $v_j$  меньше  $l_{гр}$ , то ребро  $r_{ij}$  считается «коротким». В случае, когда  $l_{ij} > l_{гр}$ , то ребро относят к «длинным». Приблизительно  $l_{гр}$  равна половине наибольшей длины связи  $l_{max}$  между элементами. Более точно  $l_{гр}$  определяют из соотношений

$$l'(l' + 1) < 0,5(l_{max} + 1);$$

$$l''(l'' + 1) < 0,5l_{max}(l_{max} + 1) \text{ и } l'' < l_{гр} < l''.$$

Алгоритм состоит из следующих этапов.

1. Элементы  $v \in V$  произвольно размещаются в установочных местах  $t \in T$  монтажного пространства, например,  $v_1 \rightarrow t_1, v_2 \rightarrow t_2$  и т. д.



2. Рассчитывается значение граничной длины  $l_{гр}$ .

3. Для каждой вершины  $v_i \in V$  множество ребер  $R_i$  разбивается на подмножества «коротких»  $R'_i$  и «длинных»  $R''_i$  ребер и подсчитывается разность

$$\Delta R_i = |R''_i| - |R'_i|,$$

где  $|R'_i|$ ,  $|R''_i|$  — числа ребер в множествах  $R'_i$  и  $R''_i$  (мощность множеств  $R'_i$ ,  $R''_i$ ).

4. Выделяется подмножество вершин  $V_n \subset V$ , для которых  $\Delta R_i > 0$ .

5. Из подмножества  $V_n$  выбирается вершина  $v_m$  с максимальным числом инцидентных ребер (максимальной степенью  $\rho(v_m)$ ) или с максимальным значением  $\Delta R_i$ , и относительно нее множество  $V$  делится на подмножества  $V'_m$  и  $V''_m$ . В  $V'_m$  включается вершина  $v_m$  и отстоящие от нее вершины на расстояние не больше  $l_{гр}$ , а в подмножество  $V''_m$  — все остальные вершины.

6. Формируется подмножество  $V_\mu$ , в которое включаются вершины, инцидентные длинным ребрам  $v_m$  и  $V_n \setminus v_\mu$ , т. е.

$$V_\mu = V''_m \cap (V_n \setminus v_\mu).$$

7. Для вершин  $v_j \in V_\mu$  подсчитывается число ребер  $|R_j(V'_m)|$  и  $|R_j(V''_m)|$ , инцидентных соответственно вершинам подмножеств  $V'_m$  и  $V''_m$ , и затем разность

$$\Delta R_j = |R_j(V'_m)| - |R_j(V''_m)|.$$

Определяется вершина  $v_\mu$ , для которой  $\Delta R_\mu = \max(\Delta R_j)$ .

8. Проверяется выполнение условия целесообразности перестановки, т. е.

$$\Delta R_m + \Delta R_\mu > 0, \quad (5.29)$$

где  $\Delta R_m = \max(\Delta R_i)$ .

Если это условие выполняется, то вершины  $v_m$  и  $v_\mu$ , меняются местами, иначе берется другая вершина из подмножества  $V_n$  и повторяются п. 5–8.

9. Подсчитывается значение критерия  $Q$  по формуле (5.20).

Далее на каждой итерации выполняются п. 3–9. Расчет прекращается, когда подмножество  $V_n$  станет пустым или для всех  $v \in V_n$  условие (5.29) не выполняется.

Рассмотрим данный алгоритм на следующем примере. Пусть в результате начального размещения получен граф  $G(V, R)$ , представленный на рисунке 5.15.

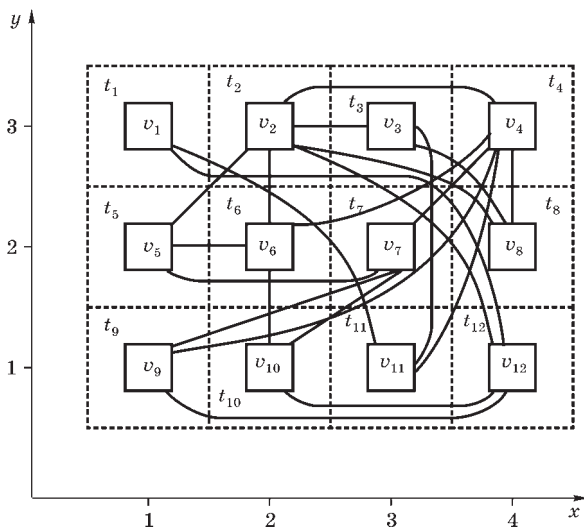


Рис. 5.15  
Начальное  
размещение  
элементов  
в МКП

В соответствии с исходными данными максимальная длина ребра равна  $l_{\max} = 5$ , в качестве граничного значения берется  $l_{\text{гр}} \approx 2,5$ . Значения  $|R'_i|$ ,  $|R''_i|$  и  $\Delta R_i$  для всех вершин представлены в таблице 5.1. Здесь вершина  $v_1$  не содержит коротких ребер с  $l_{1j} < l_{\text{гр}}$  и  $|R'_1| = 0$ , оба ребра  $r_{1,11}$  и  $r_{1,12}$  «длинные», поэтому  $|R''_1| = 2$  и  $\Delta R_1 = |R''_1| - |R'_1| = 2$ . Аналогично определяются  $\Delta R_i$  и для других вершин.

Таблица 5.1

Выделение «коротких» и «длинных» связей

Вершина	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$
$ R'_i $	0	4	3	3	3	3	3	2	0	3	1	1
$ R''_i $	2	2	0	3	0	1	1	0	3	0	2	3
$\Delta R_i$	2	-2	-3	0	-3	-2	-2	-2	3	-3	1	2

Вершины с  $\Delta R_i > 0$  образуют подмножество  $V_n = \{v_1, v_9, v_{11}, v_{12}\}$ . Выбирается в качестве первой вершины  $v_m$  пары  $(v_m, v_\mu)$  для перестановки вершина  $v_{12}$ , имеющая максимальную степень ( $\rho(v_{12})=4$ ). Относительно нее множество  $V$  делится на подмножества  $V'_{12} = \{v_4, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$  и  $V''_{12} = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_9\}$ . Формируется подмножество

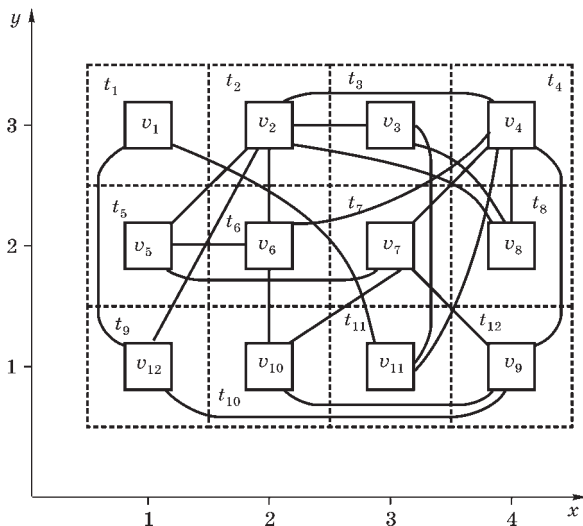
$$V_\mu = V''_{12} \cap (V_n \setminus v_{12}) = V''_{12} \cap \{v_1, v_9, v_{11}\} = \{v_1, v_9\}.$$

Для вершин  $v_1$  и  $v_9$  определяются числа  $|R_1(V'_{12})| = 2$ ;  $|R_1(V''_{12})| = 0$ ;  $|R_9(V'_{12})| = 3$ ;  $|R_9(V''_{12})| = 0$  и далее подсчитываются их разности:

$$\Delta R_1 = |R_1(V'_{12})| - |R_1(V''_{12})| = 2;$$

$$\Delta R_9 = |R_9(V'_{12})| - |R_9(V''_{12})| = 3.$$

Так как  $\Delta R_9 > \Delta R_1$ , то в качестве второй вершины  $v_\mu$  пары  $(v_m, v_\mu)$  выбирается  $v_9$ . Условие (5.29) выполняется, так как  $\Delta R_{12} + \Delta R_9 = 2 + 3 > 0$  и, следовательно, производится перестановка вершин  $v_{12}$  и  $v_9$ . На этом первая итерация считается завершенной. Граф  $G(V, R)$  после перестановки показан на рисунке 5.16.



**Рис. 5.16**  
Размещение элементов в МКП после первой итерации

Аналогично первой итерации алгоритма производятся и последующие до тех пор, пока подмножество  $V_n$  не станет пустым или для  $\forall v \in V_n$  условие (5.29) не перестанет выполняться.

Завершающим этапом алгоритма является оценка критерия оптимальности по формуле (5.20).

Рассмотренный алгоритм не относится к числу точных и не всегда позволяет найти наилучшее размещение элементов схемы, однако его достоинствами являются простота и высокое быстродействие.

### 5.2.3. Последовательный алгоритм размещения однотипных элементов

Алгоритм используется при размещении  $n$  однотипных элементов  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  в  $m$  установочных мест  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  монтажно-коммутационного пространства, причем часть элементов может жестко закрепляться за отдельными позициями МКП. В случае, когда количество элементов схемы меньше числа установочных мест, то вводятся дополнительные фиктивные компоненты. Все элементы соединены между собой электрическими цепями, составляющими множество  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ . В качестве целевой функции может рассматриваться минимум суммарной длины электрических связей (5.20) или минимум суммы полупериметров прямоугольников, охватывающих электрические цепи.

Сущность алгоритма состоит в том, чтобы на очередную позицию устанавливать элемент, максимально связанный с ранее размещенными. Мера связности  $S_{ij}$  двух элементов  $v_i$  и  $v_j$  есть число общих для них цепей, т. е.

$$S_{ij} = \sum_{k \in C(v_i) \cap C(v_j)} \sigma_k, \quad (5.30)$$

где  $C(v_i)$ ,  $C(v_j)$  — подмножества цепей, связанных с элементами  $v_i$  и  $v_j$ ;  $\sigma_k$  — весовой коэффициент цепи  $C_k$ , обычно  $\sigma_k = 1$ . Если элементы с общей  $k$ -й цепью необходимо разместить как можно ближе, то берется  $\sigma_k > 1$ .

Из значений мер связности  $S_{ij}$  формируется матрица связей

$$\mathbf{S} = \parallel S_{ij} \parallel_{n \times n},$$

где  $n$  — число элементов схемы.

Если по условию задачи нет закрепленных элементов, то в первую позицию  $t_1$  устанавливается элемент  $v_i$  из подмножества  $C(v_i)$  с минимальным числом цепей. На очередное место устанавливается элемент, имеющий максимальное значение коэффициента связности с ранее размещенными, определяемого по формуле

$$K\left(\frac{v_i}{J_{\text{разм}}}\right) = \sum_{j \in J_{\text{разм}}} S_{ij}, \quad (5.31)$$

где  $J_{\text{разм}}$  — множество номеров размещенных элементов.

После выбора очередного элемента для него определяется оптимальное посадочное место из числа свободных. Для этого можно рассчитать суммарную длину связей до размещенных элементов. Такое последовательное размещение продолжается, пока не будут расставлены все элементы. Значение критерия оптимальности в виде суммы полупериметров прямоугольников, охватывающих цепи, рассчитывается по формуле

$$Q = \sum_{p \in C} (\Delta x(c) + \Delta y(c)), \quad (5.32)$$

$$\Delta x(c) = x_{\max}(c) - x_{\min}(c), \quad \Delta y(c) = y_{\max}(c) - y_{\min}(c),$$

где  $x_{\max}(c)$ ,  $x_{\min}(c)$ ,  $y_{\max}(c)$ ,  $y_{\min}(c)$  — максимальные и минимальные координаты по осям  $x$  и  $y$  прямоугольника  $P_c$ , охватывающего все точки цепи  $C$ .

Рассмотрим последовательный алгоритм на примере размещения шести однотипных элементов в монтажное пространство, электрическая схема соединения которых приведена на рисунке 5.17.

На основании исходных данных можно сделать вывод о существовании трех множеств: элементов  $V = \{v_1, \dots, v_6\}$ , посадочных мест  $T = \{t_1, \dots, t_6\}$  и электрических цепей  $C = \{c_1, \dots, c_6\}$ .

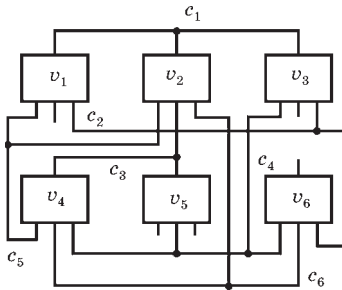


Рис. 5.17  
Электрическая схема  
соединения однотипных  
элементов

Для расчета матрицы связей определяем подмножества цепей  $C(v)$  для каждого элемента  $v \in V$ . В результате получаем  $C(v_1) = \{c_1, c_2, c_5\}$ ,  $C(v_2) = \{c_1, c_3, c_5, c_6\}$ ,  $C(v_3) = \{c_1, c_2, c_4\}$ ,  $C(v_4) = \{c_3, c_4, c_5, c_6\}$ ,  $C(v_5) = \{c_3, c_4\}$  и  $C(v_6) = \{c_2, c_4, c_6\}$ .

На основании подмножества  $C(v)$  по формуле (5.30) рассчитываются элементы  $S_{ij}$  матрицы связей  $S$ . Например, элемент  $S_{12}$  (в предположении, что  $\sigma_k = 1$ ) для всех цепей равен

$$S_{12} = \sum_{k \in C(v_1) \cap C(v_2)} \sigma_k = \sum_{k \in \{c_1, c_5\}} \sigma_k = 2.$$

После определения всех элементов  $S_{ij}$  матрица связей для рассматриваемого примера запишется в виде

$v$	1	2	3	4	5	6	$ C(v_i) $	$K(v_i / J_{\text{разм}})$
1	0	2	2	1	0	1	3	0
2	2	0	1	3	1	1	4	1
3	2	1	0	1	1	2	3	1
4	1	3	1	0	2	2	4	2
5	0	1	1	2	0	1	2	—
6	1	1	2	2	1	0	3	1

Дополнительным столбцом в матрице связей приведены мощности подмножеств  $C(v_i)$ .

Так как для элемента  $v_5$  значение мощности  $|C(v_i)|$  минимально, то его размещаем в позицию  $t_1$ . Чтобы определить, какой элемент разместить в очередную позицию, вычисляем коэффициенты связности по формуле (5.31), т. е.

$$K(v_1 / J_{\text{разм}}) = \sum_{j \in J_{\text{разм}}}^{|J_{\text{разм}}|} S_{1j} = S_{15} = 0;$$

$$K(v_2 / J_{\text{разм}}) = \sum_{j \in J_{\text{разм}}}^{|J_{\text{разм}}|} S_{2j} = S_{25} = 1;$$

$$K(v_3 / J_{\text{разм}}) = \sum_{j \in J_{\text{разм}}}^{|J_{\text{разм}}|} S_{3j} = S_{35} = 1;$$

$$K(v_4 / J_{\text{разм}}) = \sum_{j \in J_{\text{разм}}}^{|J_{\text{разм}}|} S_{4j} = S_{45} = 2;$$

$$K(v_6 / J_{\text{разм}}) = \sum_{j \in J_{\text{разм}}}^{|J_{\text{разм}}|} S_{6j} = S_{65} = 1.$$

Подсчитанные значения коэффициентов связности  $K(v_i / J_{\text{разм}})$  приведены дополнительным столбцом в матрице связей  $S$ .

Очевидно, что с элементом  $v_5$  максимально связан элемент  $v_4$ , поэтому его размещаем в позицию  $t_2$ . Аналогичным образом размещаются и остальные элементы. Алгоритм завершает работу, когда свободные элементы отсутствуют, и определяется критерий оптимальности по формуле (5.32).

#### 5.2.4. Алгоритм, основанный на методе ветвей и границ

Иногда исходные данные задачи размещения представляют расширенной матрицей цепей электрической схемы, при этом указывая расположения вертикальных и горизонтальных каналов в МКП и количество в них магистралей (магистраль представляет собой участок канала, по которому проходит электрическая цепь). В качестве критерия оптимальности берется минимум числа внутрисхемных пересечений (5.21) [3], [15]. Расширенная матрица цепей

$$C_{\text{ext}} = \|c_{i,j}\|$$

содержит  $n$  строк (по числу элементов) и в общем случае  $2d \times 2r$  столбцов, где  $d$  — число контактов верхней (ниж-

ней) части элемента, а  $r$  — число магистралей вертикального канала для соединения от верхних и нижних контактов. По матрице  $C_{ext}$  рассчитывается вспомогательная матрица пересечений

$$P = \| \| p_{ij} \| \|_{k \times k},$$

где  $k$  — число цепей;  $p_{ij}$  — количество пересечений между фрагментами цепей  $c_i$  и  $c_j$ , расположенными в одном канале, причем фрагмент цепи  $c_i$  расположен под фрагментом  $c_j$ . Если фрагмент цепи  $c_i$  по какой-либо причине не может быть расположен ниже  $c_j$ , то  $p_{ij} = \infty$ .

В процессе решения задачи последовательно заполняются фрагменты цепей в пределах канала магистрали, начиная с первой (нижней). Суть алгоритма состоит в том, что при выборе фрагмента цепи для очередной магистрали учитывается, чтобы число пересечений с остальными, еще не размещенными фрагментами, было минимально. Для осуществления этой цели множество  $A$  всех допустимых размещений, т. е. решений задачи, разбивается на подмножества. Сначала заполняется первая магистраль, поэтому множество  $A$  разбивается на подмножества решений задачи  $A_{c_i}^1, i = 1, k$ , в которых фрагмент цепи  $c_i$  расположен в первой магистрали (ниже всех остальных). Если минимальное значение критерия оптимальности (5.21) для канала обозначить  $Q^*(A)$ , то для подмножества решений  $A_{c_i}^1$  значение критерия запишется в виде

$$Q(A_{c_i}^1) = Q^*(A) + \delta_{c_i},$$

где  $\delta_{c_i}$  — дополнительное к значению  $Q^*(A)$  число пересечений при расположении фрагмента цепи  $c_i$  на первой магистрали.

Очевидно, что в первой магистрали следует разместить фрагмент цепи, для которого  $\delta_{c_i}$  минимально. Значение  $\delta_{c_i}$  рассчитывается по формуле

$$\delta_{c_i} = \sum_{j=1}^k \Delta p_{ij}, \quad (5.33)$$

в которой значение  $\Delta p_{ij}$  определяется соотношением



$$\Delta p_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - p_{ji}, & \text{если } p_{ij} > p_{ji}; \\ 0, & \text{если } p_{ij} \leq p_{ji}, \end{cases} \quad (5.34)$$

где  $p_{ij}$  и  $p_{ji}$  — элементы матрицы  $\mathbf{P}$ .

Нулевое значение  $\Delta p_{ij}$  при  $p_{ij} < p_{ji}$  указывает на то, что размещение фрагмента цепи  $c_i$  ниже фрагмента цепи  $c_j$  дает меньше пересечений, чем размещение фрагмента  $c_j$  по  $c_i$ .

Положительное значение  $\Delta p_{ij}$ , т. е. разности  $(p_{ij} - p_{ji})$ , соответствует увеличению числа пересечений при размещении фрагмента  $c_i$  ниже  $c_j$ . В свою очередь, подмножество решений  $A_{c_i}^1$  подразделяется на подмножества решений второго шага  $A_{c_j}^2$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $j \neq i$ . Для анализа решений  $A_{c_j}^2$  используется матрица  $\mathbf{P}_1$ , получаемая из  $\mathbf{P}$  удалением строки и столбца, соответствующих цепи  $c_i$ , выделенной на первом шаге. В этом случае фрагмент цепи  $c_j$  на втором шаге выбирается из условия

$$Q(A_{c_j}^2) = Q(A_{c_i}^1) + \delta_{c_j}^1 \rightarrow \min,$$

для проверки которого значение  $\delta_{c_j}^1$  подсчитывается по формуле

$$\delta_{c_j}^1 = \sum_{l=1, l \neq i}^k \Delta p_{j,l}.$$

Такой процесс ветвления множества решений  $A$  (рис. 5.18) продолжается до тех пор, пока не будет получено подмножество, состоящее из одного решения.

Если на каком-либо  $v$ -м шаге для нескольких фрагментов цепей  $\delta_c^v = 0$ , то эти цепи объединяют в один массив  $C_\Sigma^v$ , для которого выделяют подмножество решений  $A_{C_\Sigma^v}^v$ . Дальнейшее ветвление продолжается из вершины  $A_{C_\Sigma^v}^v$ . Если для нескольких цепей  $c \in C_j$  минимальные значения  $\delta_c$  одинаковы и больше нуля, то строится

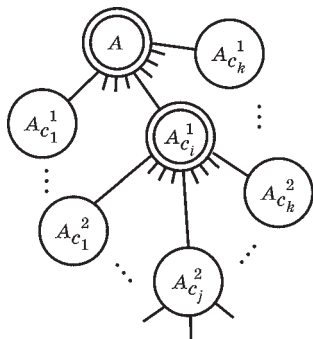


Рис. 5.18  
Схема процесса ветвления множества решений

матрица  $P'_j$ , содержащая столбцы и строки, соответствующие только этим цепям. Если же опять минимальные значения  $\delta_c$  для нескольких цепей  $c \in C_i \subset C_j$  равны и положительны, то процесс сокращения матрицы продолжается, пока не будет достигнуто значение  $\delta_c=0$ . В результате решения задачи получаем упорядоченное множество цепей  $C^*=(c_i, c_j, \dots)$ , которое может содержать и массивы вида  $C_\Sigma^V$ .

Размещение фрагментов цепей по магистралям на основе множества  $C^*$  производится в следующей последовательности:

1) фрагмент цепи  $c_i$ , выделенной на первом шаге, размещают на первой магистрали; если на первом шаге получен массив  $c_\Sigma$ , то его фрагменты размещаются на первых магистралях так, чтобы различные цепи не совмещались на одном участке магистрали;

2) берется фрагмент цепи  $c_j$  и для него определяется самая низкая магистраль, на которой он не совмещается с ранее размещенными цепями и т. д. После размещения подсчитывается число пересечений  $Q_2$ .

Рассмотрим данный алгоритм на простом примере. Пусть требуется разместить соединения элементов по семи магистралям горизонтального канала с минимальным числом пересечений для схемы, приведенной на рисунке 5.19.

Расширенная матрица цепей для схемы имеет следующий вид:

$$C = \begin{matrix} & \overbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}^d & \overbrace{5}^r \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} 1a & 2a & 3a & 4a & - \\ - & 2 & 3b & 5a & - \\ 5b & 6a & 7a & 1 & 1c \\ 1b & 4 & 2 & 8a & 2bc \\ 7 & 8 & 4b & 9a & 9d \\ 6b & 8 & 7 & 10a & - \\ 8b & 9b & 7b & 10b & - \end{matrix} \right], \end{matrix}$$

где  $a, b$  — индексы, обозначающие соответственно начало и конец цепи в магистрали горизонтального канала при

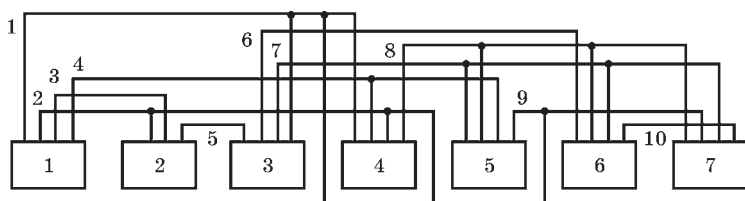


Рис. 5.19  
Исходная схема

распространении слева направо;  $c, d$  — индексы, обозначающие начало и конец в магистрали вертикального канала при распространении сверху вниз.

Число столбцов матрицы пять, что соответствует четырем контактам верхней части элемента ( $d=4$ ) и одному вертикальному каналу при распространении сверху вниз.

Определение  $p_{ij}$  по матрице  $C$  производится следующим образом. Для первой строки матрицы  $P$  (цепь  $c_j$ ) в матрице  $C$  берутся начало цепи ( $1a$ ) и конец ( $1b$ ). Затем, просматривая по строкам элементы матрицы  $C$  от  $1a$  до  $1b$ , подсчитываются пересечения с другими цепями (значения 1 и  $1c$  не учитываются, так как они идут вниз). Так, при определении  $p_{12}$  цепь  $c_2$  встречается два раза ( $c_{12}=2a, c_{22}=2$ ), поэтому  $p_{12}=2$ . При расчете  $p_{ij}$  следует учитывать, что элементы матрицы  $C$  с индексом  $d$  (фрагмент идет вверх по вертикальному каналу) дают дополнительное пересечение. Таким образом, для десяти цепей вспомогательная матрица  $P$  равна

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \delta_{c_i} : & 4 & 4 & 0 & 6 & 0 & 6 & 5 & 0 & 3 & 0 \end{matrix}$$

С помощью формул (5.33), (5.34) определяются значения  $\delta_{c_i}$  и  $\Delta p_{ij}$ . В частности, для цепи  $c_1$  имеет место  $\Delta p_{12}=0$ , так как  $p_{12}-p_{21}=2-3=-1 < 0$ ;  $\Delta p_{12}=p_{13}-p_{31}=2$  и т. д.;  $\delta_{c_1} = \sum_{i=2}^{10} \Delta p_{ij} = 4$ .

Значения  $\delta_{c_i}$ ,  $i=1, 10$  приведены под матрицей  $\mathbf{P}$ . Так как  $\delta_{c_3} = \delta_{c_5} = \delta_{c_8} = \delta_{c_{10}} = 0$ , то фрагменты цепей  $c_3, c_5, c_8, c_{10}$  следует разместить на нижней магистрали канала, поэтому их соединяют в одну объединенную цепь  $C_\Sigma$ .

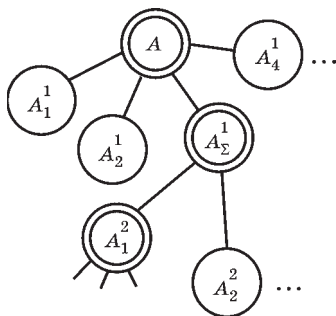


Рис. 5.20  
Схема ветвления решений задачи с объединенной цепью  $C_\Sigma$

Вершины  $A_3^1, A_5^1, A_8^1, A_{10}^1$  дерева решений также объединяют в одну  $A_\Sigma^1$ ,  $\Sigma=\{3, 5, 8, 10\}$ . Дальнейший процесс решения начинается из  $A_\Sigma^1$  (рис. 5.20).

Для этого из матрицы  $\mathbf{P}$  вычеркиваются строки и столбцы с номерами  $\Sigma$ , в результате чего получаем новую матрицу  $\mathbf{P}_1$ , равную

$$\mathbf{P}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot$$

$$\delta_{c_i}^1 : 0 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \quad 1$$

Затем подсчитываются значения  $\delta_c^1$  и т. д.

### 5.2.5. Алгоритм случайного поиска

Решение задачи оптимального размещения элементов ЭС в МКП по векторному критерию часто производится поисковыми методами. Рассмотрим применение алгорит-

ма случайного поиска для векторного критерия, включающего три частных показателя:

- 1) минимум суммарной длины соединений  $Q_1$ ;
- 2) минимум числа пересечений проводников  $Q_2$ ;
- 3) минимум числа соединений, длина которых превышает допустимую величину  $Q_3$ .

Пусть множество  $V$  конструктивных элементов и множество  $R$  связей между ними, т. е. граф  $G(V, R)$ , задается матрицей смежности  $S = \|s_{ij}\|_{n \times n}$ , где  $n$  — число элементов. Монтажное пространство задано множеством установочных мест  $T$  и расстояниями в виде матрицы длин  $D$  или списка координат позиций. По координатам позиции рассчитывается расстояние между ними по формулам (3.13) или (3.14).

Варианты размещения формируются с помощью генератора случайных чисел. Для варианта размещения на  $k$ -м шаге по формулам (5.20)–(5.22) рассчитываются значения показателей  $Q_1^{(k)}$ ,  $Q_2^{(k)}$ ,  $Q_3^{(k)}$ . Качество полученного размещения оценивается с помощью комплексного критерия:

$$Q^{(k)} = \sum_{j=1}^3 c_j \frac{Q_j^{(k-1)} - Q_j^{(k)}}{Q_j^{(k-1)}},$$

где  $c_j$  — коэффициент, учитывающий важность  $j$ -го показателя.

Если  $Q^{(k)} > 0$ , то  $k$ -й вариант считается лучше предыдущего (или базового) и его принимают за новое базовое значение, в противном случае вариант отбрасывают. Обычно на первом шаге в качестве базовых значений выбирают заведомо большие числа  $Q_{j \max} > 0$  (из области допустимых), поэтому при оценке первого варианта  $Q^{(1)} > 0$ .

Процесс поиска продолжается до тех пор, пока значение критерия  $Q$ , соответствующее выбору нового базового варианта, на протяжении большого числа шагов, например 20–30, не будет меньше некоторой заранее заданной погрешности, или пока не будет исчерпан лимит времени на решение задачи.

### 5.2.6. Алгоритмы размещения соединений по слоям платы

После размещения электронных компонентов в МКП следующим этапом проектирования печатного узла является определение числа сторон (слоев) платы для размещения по ним печатных проводников в соответствии с электрической схемой устройства.

Необходимым требованием к размещению соединений электрической схемы на односторонней печатной плате (ОПП) является возможность расположения на одной стороне платы без пересечения ребер планарного графа  $G(V, R)$ , соответствующего этой схеме. В этом случае для такого графа с числом вершин  $n$  и числом ребер  $m$  должно выполняться условие  $m < n + 2$ . Если граф  $G(V, R)$  удовлетворяет условию  $m > 3 \cdot (n - 2)$ , то схему соединений можно разместить на двусторонней печатной плате (ДПП). В случае, когда  $(n + 2) < m \leq 3 \cdot (n - 2)$ , то размещение печатных проводников возможно как на ОПП, так и на ДПП.

Для многослойных печатных плат (МПП) задачу определения числа слоев можно сформулировать следующим образом. задается множество цепей в виде подграфов. Требуется определить число слоев печатного монтажа, на которых эти цепи могут быть размещены без пересечений при соблюдении заданных ограничений. Такими ограничениями являются количество слоев и число межслойных переходов.

При решении этой задачи возможны два случая:

- 1) предварительная трассировка не проводилась;
- 2) трассы отдельных цепей получены.

Как в первом, так и во втором случае, при определении числа слоев платы часто используется метод «раскраски» графа, основанный на понятии хроматического числа  $X(G)$ , которым называется минимально необходимое количество цветов, в которое можно раскрасить вершины, причем вершины одного цвета не должны быть смежными [15].

Метод «раскраски» основан на так называемой гипотезе «о четырех красках», утверждающей, что достаточно

всего четырех цветов для раскраски вершин любого планарного графа. Несмотря на простоту утверждения, уже свыше столетия математикам пока не удалось ни однозначно доказать, ни опровергнуть эту гипотезу, возникновение которой исторически связано с раскрашиванием географических карт. Однажды картографы задались вопросом: если имеется карта с изображением нескольких стран, то сколько понадобится цветов для такой раскраски этих стран, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один и тот же цвет? Ответ был получен следующий: любую карту можно раскрасить с помощью всего четырех красок.

Основными положениями метода «раскраски» являются следующие:

- все вершины  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  исходного графа ранжируются по их степеням от максимальной степени к минимальной;
- первая вершина полученного ряда, а также все вершины, не смежные с ней, окрашиваются в первый цвет выбранной палитры и удаляются из ряда, далее аналогично раскрашиваются и остальные вершины.

В качестве примера рассмотрим задачу раскраски графа  $G(V, R)$ , заданного матрицей смежности

$$S = \begin{array}{c} v \\ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & s(v_i) \\ \left( \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

В соответствии с методом «раскраски» вершины графа ранжируются по степеням, определяются хроматическое число ( $X(G)=3$ ) и цвета палитры (табл. 5.2), а далее строится и раскрашивается граф, как показано на рисунке 5.21.

Таблица 5.2

## Ранжирование вершин по степеням и цветам

Вершины, $V$	$v_3$	$v_2$	$v_4$	$v_5$	$v_7$	$v_1$	$v_6$
Степень, $s(v_i)$	5	4	3	3	3	2	2
Цвет 1 $\odot$ (красный)	1		1				
Цвет 2 $\circ$ (зеленый)		2					2
Цвет 3 $\bullet$ (синий)				3	3	3	

На использовании рассмотренного метода основано большинство алгоритмов для определения количества сторон (слоев) печатной платы. Приведем один из них, состоящий из трех этапов.

На первом этапе множество заданных цепей, характеризующих соединения электрической схемы, заменяется прямоугольниками на плоскости.

На втором этапе строится граф перекрытий прямоугольников  $G_{\Pi}$ . Вершинами графа являются номера прямоугольников, а ребра между вершинами проводятся в том случае, если прямоугольники перекрываются.

Третий этап алгоритма связан с раскраской графа и определением хроматического числа графа перекрытий, показывающего число слоев платы.

Рассмотрим порядок работы с алгоритмом на примере определения числа слоев печатной платы для некоторой электрической схемы.

В соответствии с алгоритмом множество цепей схемы заменяются прямоугольниками на плоскости, как показано на рисунке 5.22.

Затем составляется граф перекрытия прямоугольников и применяется алгоритм раскраски. Для этого опре-

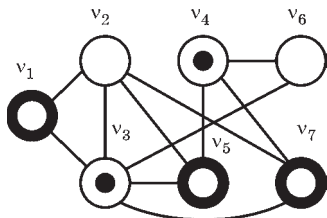


Рис. 5.21  
Раскрашенный граф

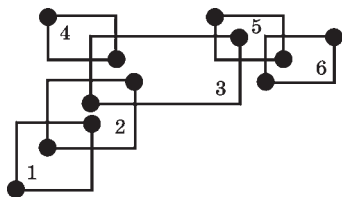


Рис. 5.22  
Замена цепей схемы  
прямоугольниками



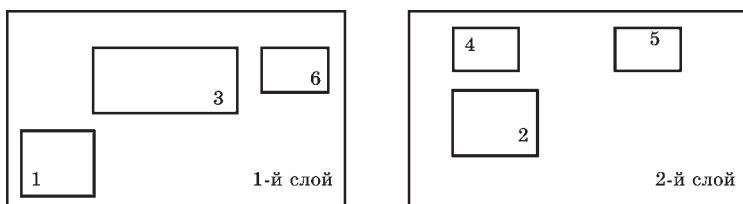


Рис. 5.23  
Распределение цепей схемы по слоям

деляется хроматическое число (в нашем случае  $X(G)=2$ ), которое и соответствует числу слоев платы, показанных на рисунке 5.23.

Необходимо заметить, что рассмотренный алгоритм позволяет с достаточной точностью решить задачу размещения соединений по слоям ПП и удобен для реализации на ЭВМ.

### 5.3. ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ

Трассировка является одной из самых сложных задач проектирования ЭС и заключается в соединении между собой контактов ЭРИ электрической цепью, при этом критерий качества электрических соединений должен достигать экстремального значения и выполняться необходимые технологические ограничения [3], [6], [15], [43], [44].

Задача трассировки печатных соединений на плате формулируется следующим образом. На коммутационной поверхности задано координатами  $(x, y)$  множество конструктивных элементов  $Z=\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ . Выводы (контакты) этих элементов образуют некоторое множество из  $L$  связанных подмножеств:  $E=\{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ , причем каждое подмножество  $C_i$  объединяет  $N_i$  выводов конструктивных элементов из множества  $Z$  в соответствии с принципиальной электрической схемой. Кроме того, заданы расположение групп контактных площадок разъемов и монтажных отверстий, а также ряд требований, предъявляемых к топологии платы: минимальная ширина проводников и зазора между ними, размеры контактных площадок, число слоев металлизации и способы перехода с одного слоя на дру-

гой и т. п. Требуется, с учетом заданных конструкторско-технологических ограничений, соединить выводы конструктивных элементов внутри каждого подмножества  $C_l \subset E$  так, чтобы выбранный критерий качества печатного монтажа достигал экстремального значения.

На практике при оптимизации топологии печатного монтажа используют такие критерии качества, как минимум суммарной длины всех соединений, минимум числа пересечений проводников, равномерность распределения проводников на печатной плате, минимальная протяженность параллельных участков соседних проводников, минимум числа изгибов проводников и минимум числа межслоевых переходов. Часто используются обобщенные критерии на основе нескольких частных. При выборе обобщенного критерия следует учитывать важность отдельных частных критериев, например введением весовых коэффициентов.

Более коротко задачу трассировки можно сформулировать так. По указанным исходным данным требуется оптимальным образом провести трассы между контактами элементов в соответствии со схемой электрической принципиальной, последовательно решая следующие задачи:

- 1) определение перечня электрических соединений;
- 2) распределение соединений по слоям платы;
- 3) определение порядка проведения трасс;
- 4) выполнение трассировки (см. рис. 4.24).

Трассировку соединений в большинстве случаев осуществляют с помощью разнообразных алгоритмов: эвристических и основанных на методе динамического программирования. Общим положением для всех этих алгоритмов является разбиение МКП на ячейки (дискреты), размеры которых выбирают, исходя из класса точности печатной платы и шага координатной сетки [3], [6], [15], [43], [44].

### **5.3.1. Алгоритмы формирования списка электрических соединений**

Для определения перечня электрических соединений элементов схемы используются алгоритмы, основанные на методе построения минимального остовного дерева

взвешенного связного неориентированного графа. Алгоритмическая реализация метода впервые была представлена в 1956 г. математиком Д. Крускалом и дополнена Г. Лоберманом и А. Вейнбергером в 1957 г.

Работа алгоритма предполагает выполнение следующих шагов.

1. Вычисляются длины (веса)  $l_r$  всех ребер графа по формуле (3.13) или (3.14).

2. Все ребра ранжируются по величине, т. е.  $l_{r_1} < l_{r_2} < \dots < l_{r_n}$ .

3. Строится минимальное связывающее дерево, для этого берется первое ребро и соединяются две вершины, затем отбирается очередное по величине ребро и, если при его использовании не образуется цикла, то оно остается в качестве проводника. В противном случае выбирается следующее ребро и т. д.

В качестве примера рассмотрим построение минимального остова для взвешенного связного неориентированного графа, показанного на рисунке 5.24а.

Как видно из рисунка 5.24а ребра  $AD$  и  $CE$  имеют минимальный вес, равный 5. Пусть произвольно выбирается ребро  $AD$  (выделено жирной линией на рисунке 5.24а). Теперь наименьший вес, равный 5, имеет ребро  $CE$ .

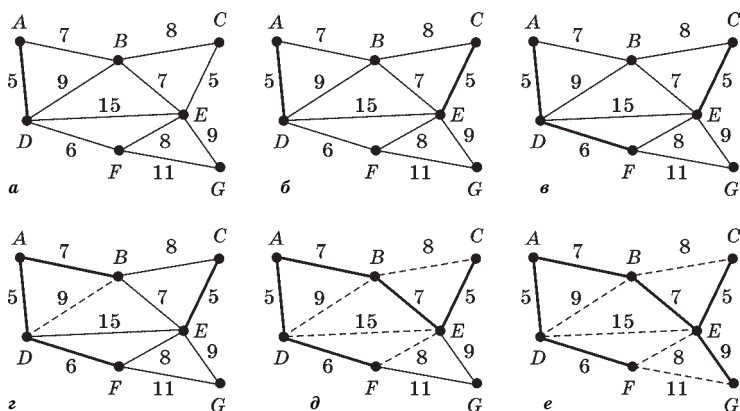


Рис. 5.24

Этапы построения минимального остова алгоритмом Вейнбергера — Лобермана

Поскольку добавление  $CE$  не образует цикла, то выбираем его в качестве второго ребра (рис. 5.24б). Аналогично выбираем ребро  $DF$ , вес которого равен 6 (рис. 5.24в). Следующие ребра —  $AB$  и  $BE$  с весом 7. Произвольно выбирается ребро  $AB$ . Ребро  $BD$  показано пунктиром, так как уже существует путь (жирная линия) между  $B$  и  $D$ , поэтому если бы это ребро было выбрано, то образовался бы цикл  $ABD$  (см. рис. 5.24г). Аналогичным образом выбирается ребро  $BE$ , вес которого равен 7. На этом этапе пунктиром выделено гораздо больше ребер (рис. 5.24д):  $BC$ , потому что оно создаст цикл  $BCE$ ,  $DE$ , который в свою очередь создаст цикл  $DEBA$ , и  $FE$ , в итоге сформируется цикл  $FEBAD$ . Алгоритм завершается добавлением ребра  $EG$  с весом 9. Минимальное остовное дерево построено (рис. 5.24е).

Недостатком алгоритма Вейнбергера — Лобермана является то, что число связей, подходящих к каждой вершине, не учитывается.

Отмеченного недостатка лишен алгоритм, впервые предложенный чешским математиком В. Ярником в 1930 г., а позднее переработанный Р. Примом в 1957 г. Работа алгоритма происходит в следующей последовательности.

1. Определяются длины  $l_r$  всех ребер графа по формуле (3.13) или (3.14).

2. Выбирается произвольная вершина графа для начала построения минимального связывающего дерева.

3. К текущему дереву присоединяется самое короткое из ребер, соединяющих вершину из построенного дерева и вершину из множества оставшихся вершин. Этап выполняется до тех пор, пока разрастающееся дерево не охватит все вершины исходного графа.

Рассмотрим построение минимального остовного дерева для взвешенного связанного неориентированного графа из предыдущего примера с помощью алгоритма Прима. Числа возле ребер показывают их веса, которые можно рассматривать как расстояния между вершинами, т. е. длины связей.

В качестве начальной произвольно выбирается вершина  $D$ . Любая из вершин  $A$ ,  $B$ ,  $E$  и  $F$  соединена с  $D$  един-

ственным ребром. Вершина  $A$  — ближайшая к  $D$ , поэтому она и выбирается как вторая вершина вместе с ребром  $AD$  (рис. 5.25а). Следующая вершина должна быть ближайшей к любой из выбранных вершин ( $D$  или  $A$ ). Вершина  $B$  удалена от  $D$  на 9 и от  $A$  на 7. Расстояние до вершины  $E$  равно 15, а до  $F$  — 6. Следовательно, вершина  $F$  является ближайшей, поэтому она включается в дерево вместе с ребром  $DF$ , как показано на рисунке 5.25б. Аналогично выбирается вершина  $B$ , удаленная от  $A$  на 7, и ребро  $BA$  (рис. 5.25в). На следующем шаге алгоритма появляется возможность выбрать либо  $C$ , либо  $E$ , либо  $G$ . Поскольку вершина  $C$  удалена от  $B$  на 8, вершина  $E$  удалена от  $B$  на 7, а вершина  $G$  удалена от  $F$  на 11, то  $E$  — ближайшая вершина, поэтому выбирается ребро  $BE$  (рис. 5.25г). Далее доступны только вершины  $C$  и  $G$ . Так как расстояние между вершинами  $E$  и  $C$  равно 5, а между  $E$  и  $G$  составляет 9, то выбирается вершина  $C$  и ребро  $EC$  (рис. 5.25д). Теперь единственная оставшаяся вершина —  $G$ . Расстояние от  $F$  до нее равно 11, а от  $E$  — 9, поэтому выбирается вершина  $G$  и ребро  $EG$  (рис. 5.25е).

Поскольку из исходного графа выбраны все вершины, работа алгоритма на этом завершается. Как видно из рисунка 5.25е, построенное минимальное остовное дерево имеет вес, равный 39.

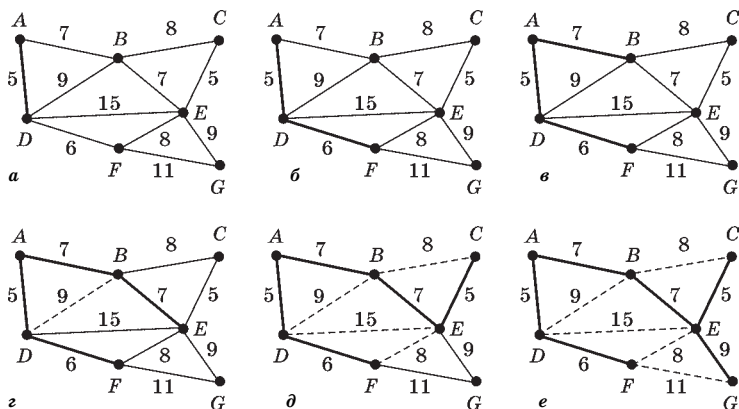


Рис. 5.25

Этапы построения минимального остовного дерева алгоритмом Прима

Достоинствами рассмотренных алгоритмов Вейнбергера — Лобермана и Прима являются их простота и удобство реализации в программном обеспечении САПР.

### 5.3.2. Алгоритмы определения порядка проведения соединений

При проведении электрических соединений на односторонней печатной плате (или в пределах одного слоя платы) без пересечений решается задача, связанная с определением порядка проведения трасс. Для ее решения в настоящее время разработано множество разнообразных способов, основу многих из которых составляют эвристический алгоритм, использующий принцип удлинения проводников, алгоритм Айкерса, а также их модификации.

Наиболее простым является первый алгоритм, состоящий из двух этапов:

1. Рассчитываются удлинения связей за счет огибания других проводников.

2. Проводится самая короткая трасса, затем трасса с минимальным удлинением относительно предыдущей и т. д. в порядке возрастания удлинений.

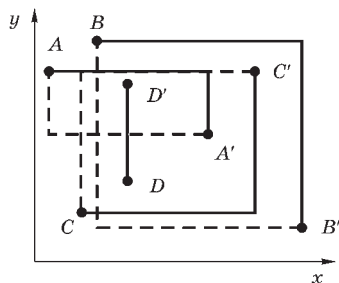
Более сложным (но и более точным) является алгоритм, основанный на методе Ш. Айкерса. Он состоит из следующих этапов:

1. Контакты трассы очерчиваются прямоугольниками.
2. Подсчитываются числа  $N$  контактов, содержащихся в каждом прямоугольнике, входящем в рассматриваемый прямоугольник трассы.
3. Полученные трассы ранжируются по величине  $N$ .
4. Проводятся трассы в порядке возрастания значения  $N$ .

В качестве примера на рисунке 5.26 показан фрагмент проведения соединений электрических цепей. На нем в соответствии с рассмотренным алгоритмом контакты трассы очерчены прямоугольниками. Как видно из рисунка, числа контактов, содержащихся в каждом прямоугольнике, составляют соответственно  $N_A=1$ ,  $N_B=4$ ,  $N_C=3$  и  $N_D=0$ . Следовательно, согласно алгоритму трассы должны про-

водиться в порядке  $D \rightarrow D'$ ,  $A \rightarrow A'$ ,  $C \rightarrow C'$  и  $B \rightarrow B'$ .

Рассмотренные алгоритмы не всегда обеспечивают оптимальный результат, поэтому при определении порядка проведения трасс для сложных печатных узлов необходимо использовать точные алгоритмы, основанные, например, на методе линейного программирования.



**Рис. 5.26**  
Определения порядка проведения трасс алгоритмом Айкерса

### 5.3.3. Общие сведения о алгоритмах трассировки печатных плат

Задача трассировки при целевой функции в виде минимума суммарной длины всех соединений может быть сформулирована как задача построения для графа  $G(V, R)$  схемы покрывающего дерева минимальной длины (см. § 5.3.1) и сведена в дальнейшем к проблеме соединения между собой пар ячеек (дискрет). Большое значение при этом имеет определение очередности проведения трасс. Первыми обычно соединяются контакты, расположенные на кратчайшем расстоянии друг от друга или имеющие минимальный приоритетный номер, под которым подразумевается количество контактов, подлежащих соединению, внутри прямоугольника, построенного на дискретах, через которые должна быть проведена трасса (см. § 5.3.2).

Трассировку соединений как ОПП, так и МПП осуществляют с помощью различных алгоритмов, которые можно условно разбить на три большие группы:

1. Волновые алгоритмы, основанные на идеях К. Ли и разработанные Ю. Л. Зиманом и Г. Г. Рябовым в 1965 г., а также их модификации. Данные алгоритмы широко реализуются в программном обеспечении современных САПР, поскольку позволяют легко учитывать особенности печатного монтажа в совокупности с конструктивно-технологическими ограничениями. Эти алгоритмы явля-

ются точными, и если оптимальная трасса существует, она всегда будет получена.

2. Ортогональные алгоритмы, обладающие значительно большим быстродействием, чем алгоритмы первой группы, поэтому их программная реализация на ЭВМ требует в 75–100 раз меньше вычислений по сравнению с волновыми алгоритмами. Такие алгоритмы применяют при проектировании печатных плат со сквозными металлизированными отверстиями. Недостатки этой группы алгоритмов связаны с получением большого числа межслоевых переходов и параллельно расположенных проводников, а также невозможностью гарантировать оптимального проведения всех трасс.

3. Эвристические алгоритмы, основанные на приближенных методах поиска пути в лабиринте, идея которых заключается в том, что каждое соединение проводится по кратчайшему пути, обходя встречающиеся на пути препятствия. Главным недостатком таких алгоритмов является относительно низкая точность.

#### **5.3.4. Волновой алгоритм**

Волновой алгоритм, основанный на методе динамического программирования, широко применяется при решении задач конструкторского проектирования печатных плат, в том числе многослойных. Как уже отмечалось, алгоритм является точным, поэтому если оптимальная трасса существует, то она обязательно будет получена.

Волновой алгоритм (а также его многочисленные модификации) основан на ряде положений, основными из которых являются следующие.

1. Плоскость трассировки МКП (печатной платы, полупроводникового кристалла, подложки) разбивается на прямоугольные площадки — элементарные дискретные (ячейки), габаритные размеры которых определяются геометрическими параметрами печатного рисунка, зависящими от класса точности печатной платы, диаметром выводов и минимальным расстоянием между ними. Задача проведения трассы между выводами (контактами) А



и  $B$  состоит в определении последовательности соединяющих их дискрет.

2. Все элементарные дискреты подразделяются на занятые и свободные. Занятыми считаются дискреты, в которых находятся монтажные выводы элементов, расположены проводники, построенные на предыдущих этапах, а также дискреты, соответствующие запрещенным для прокладки проводников участкам. Каждый раз при проведении новой трассы можно использовать лишь свободные дискреты, число которых по мере проведения трасс сокращается.

3. На множестве свободных дискрет МКП моделируется распространение волны из ячейки, в которой она зарождается (источник, исток), например  $A$  к другой ячейке, подлежащей соединению с ней (приемник, сток), например  $B$ . Наиболее часто в качестве приемника и источника используют две элементарные дискреты. В некоторых модификациях волнового алгоритма в качестве источника и (или) приемника выступают участки ранее проведенных трасс. Фронт волны распространяется шагами. За первый шаг волна из  $A$  распространяется на соседние свободные дискреты  $v_1[1], v_2[1], \dots$  (максимальное число их — четыре), имеющие с  $A$  общую сторону. На втором шаге фронт волны из дискрет  $v_1[1], v_2[1], \dots$  переходит на свободные соседние с последними ячейки  $v_1[2], v_2[2], \dots$ , т. е. дискреты  $v_1[1], v_2[1], \dots$  на втором шаге уже сами рассматриваются как источники вторичной волны. На третьем шаге волна из  $v_1[2], v_2[2], \dots$  распространяется дальше на соседние дискреты. Такой процесс продолжается до тех пор, пока фронт волны не достигнет приемника  $B$ . При прохождении волны во всех задействованных дискретах проставляется номер шага, направление и вес, характеризующий предпочтительность прохождения трассы через данную дискрету.

Например (рис. 5.27а), на первом шаге волна из источника  $A$  с координатами (2; 4) переходит в дискреты, координаты которых (2; 5), (2; 3) и (3; 4). Этот путь отмечается стрелками, которые проставляются в дискретах обратном ходу движения, а в левом верхнем углу соответствующей

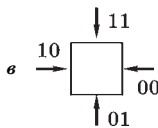
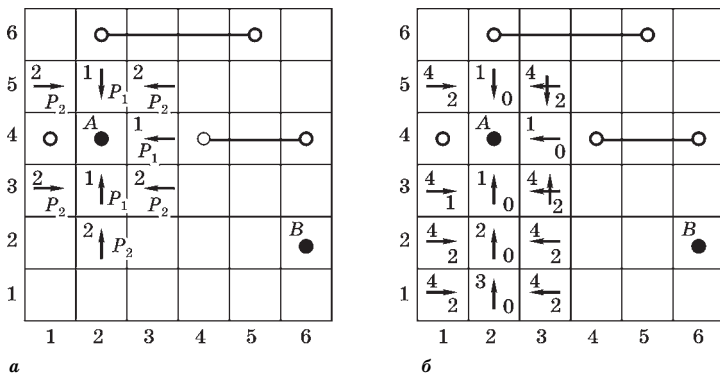


Рис. 5.27

Моделирование распространения волны:

*a* — общий случай; *b* — с учетом частных критериев; *в* — приоритетный порядок движения.

ячейки указывается номер шага. Заметим, что соседняя с *A* дискрета (1; 4) занята выводом, поэтому там волна не распространяется. На втором шаге волна распространяется из ячеек (2; 5), (2; 3), (3; 4) дальше на соседние ячейки (1; 3), (1; 5), (2; 2), (3; 3), (3; 5) и т. д. [3].

Показатель веса дискреты на *i*-м шаге  $p_i$  определяется по формуле

$$p_i = p_{i-1} + \psi(Q_1, Q_2, \dots), \quad (5.35)$$

где  $p_{i-1}$  — показатель веса ячейки, из которой сделан шаг;  $\psi(Q_1, Q_2, \dots)$  — положительная добавка, оценивающая качество пути в зависимости от выбранного критерия оптимальности проведения трассы, т. е.  $p_i \geq p_{i-1}$ .

В ячейке-источнике (нулевой шаг) вес принимается равным нулю, т. е.  $p_0 = 0$ . Вес проставляется в правом нижнем углу (рис. 5.27а).

Рассмотрим несколько примеров расчета показателя  $p_i$ . Если в качестве критерия берется минимум длины трассы, то вес рассчитывается по формуле

$$p_i = p_{i-1} + c, \quad c > 0, \quad (5.36)$$

где  $c$  — постоянная, характеризующая длину шага, если  $c=1$ , то величина  $p_i$  совпадает с номером шага (и его можно не проставлять).

В случае, когда критерием является минимум числа поворотов, то

$$p_i = \begin{cases} p_{i-1}, & \text{если нет поворота;} \\ p_{i-1} + a, & \text{если есть поворот,} \end{cases} \quad (5.37)$$

где  $a$  — положительное число (вес одного поворота), например  $a=2$ .

Если требуется провести трассу, максимально отстоящую от ранее проведенных, то

$$p_i = p_{i-1} + z, \quad (5.38)$$

где  $z$  — число занятых соседних ячеек.

Когда допускается пересечение ранее проведенных трасс (под прямым углом) и минимизируется число пересечений, то

$$p_i = \begin{cases} p_{i-1}, & \text{если нет пересечения;} \\ p_{i-1} + b, & \text{если есть пересечение,} \end{cases} \quad (5.39)$$

где  $b$  — положительное число (вес одного пересечения), например  $b=5$ .

Важно отметить, что при использовании соотношений (5.36)–(5.40) фронт волны распространяется сначала по дискретам, в которых не происходит увеличения веса.

Если требуется учесть несколько частных критериев оптимальности, то для расчета конструируется более общее соотношение на основе (5.35)–(5.39). Например, требуется провести трассу, имеющую минимальную длину при единичной длине шага, т. е.  $c=1$ , а также минимальное число поворотов и пересечений. В этом случае, используя соотношения (5.37), (5.39), получаем

$$p_i = \begin{cases} p_{i-1} + 1, & \text{нет поворота и пересечения;} \\ p_{i-1} + 1 + a, & \text{есть поворот (нет пересечения);} \\ p_{i-1} + 1 + b, & \text{есть пересечение (нет поворота);} \\ p_{i-1} + 1 + a + b, & \text{есть поворот и пересечение.} \end{cases} \quad (5.40)$$

Рассмотрим начальные шаги при минимизации числа поворотов трассы. Первые три шага делаются без поворотов (с весом  $p_0=0$ ), на четвертом шаге производится поворот направления движения волны, при этом вес поворота  $a=2$  (см. рис. 5.27б).

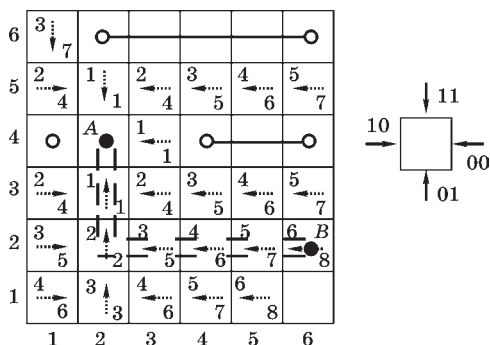
В ряде случаев при определении направления движения волны возникает неопределенность. Например, (рис. 5.27а) решается задача проведения трассы  $AB$  минимальной длины, т. е. вес  $p_i$  рассчитывается по формуле (5.36). В этом случае на втором шаге в дискретах (3; 3) и (3; 5) направление распространения волны может быть по вертикали и по горизонтали. Для исключения такого рода неопределенностей устанавливается предпочтительность движения волны по разным направлениям, т. е. вводится приоритетный порядок движения, учитывающий взаимное расположение источника  $A$  и приемника  $B$ . Приоритетный порядок задается числовыми кодами направлений движения, чем меньше число, тем предпочтительнее направление.

Например, источник  $A$  расположен левее и выше, в этом случае наиболее предпочтительно движение вправо, затем вниз, если эти направления невозможны, то волна распространяется влево или вверх, этим четырем направлениям соответствуют условные двоичные коды 00, 01, 10, 11 (рис. 5.27в). Согласно выбранным приоритетам в ячейках (3; 3) и (3; 5) следует поставить стрелки справа. Заметим, что при минимизации числа поворотов, в случае неопределенности с направлением, в соответствующей дискрете ставятся две стрелки, например в (3; 3), (3; 5) (рис. 5.27б). При расчете на ЭВМ для указания движения волны дискретам вместо стрелок присваиваются условные коды 00, 01, 10, 11 соответствующим координатам.

4. Когда фронт волны достигает приемника  $B$ , моделирование распространения волны прекращается и проводится трасса из ячейки  $B$  в  $A$ , т. е. в обратном (движению волны) порядке. Трасса проводится по дискретам с монотонным убыванием веса  $p_i$  по направлению стрелок (значений путевых координат).

На рисунке 5.28 показан ход распространения волны из  $A$  в  $B$  и проведение трассы при минимизации ее дли-

**Рис. 5.28**  
 Построение трассы с минимальной длиной и числом поворотов



ны и числа поворотов, т. е. вес дискреты с учетом (5.36) и (5.37) при  $c=1$  и  $a=3$  будет оцениваться по формуле

$$p_i = \begin{cases} p_{i-1} + 1, & \text{движение без поворота;} \\ p_{i-1} + 3, & \text{движение с поворотом.} \end{cases}$$

Как видно из рисунка 5.28, фронт волны достигает приемника  $B$  на шестом шаге из ячейки (5; 2). Трасса между  $B$  и  $A$  проводится по дискретам с координатами (5; 2), (4; 2), (3; 2), (2; 2) и (2; 3). Качество данной трассы оценивается суммарным весом 9 (длина 6 и поворот 3), это оптимальная трасса, трассы с меньшим весом нет. Если трассу провести по дискретам (6; 3), (5; 3), (4; 3), (3; 3), (2; 3), то ее вес будет 12 (длина 6 и два поворота 6).

Недостатком волнового алгоритма является значительное количество операций, связанных с определением веса и направлением движения волны на каждом шаге. К настоящему времени разработано множество различных модификаций волнового алгоритма, реализованных в программном обеспечении современных САПР, позволяющих с меньшими затратами вычислительных ресурсов решать задачи проведения трасс для соединения нескольких контактов.

### 5.3.5. Алгоритм встречной волны

Наиболее известной модификацией базового волнового алгоритма является алгоритм, основанный на принципе одновременного (встречного) распространения волны

из двух дискрет-источников, в качестве которых обычно рассматриваются отдельные контактные площадки.

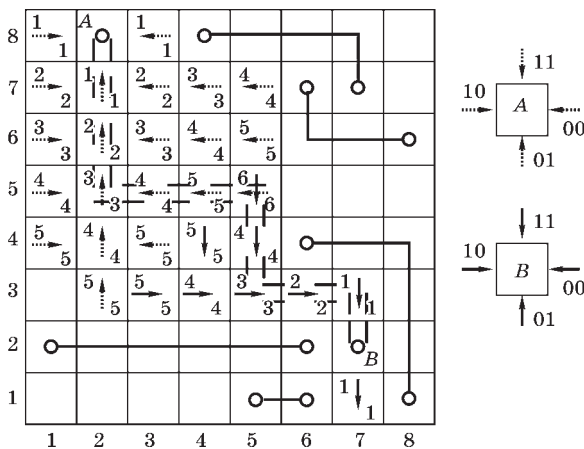
Основными этапами алгоритма встречной волны при решении задачи получения трассы между двумя контактами являются следующие.

1. Задается приоритетный порядок распространения волны для двух контактов-источников.
2. На каждом шаге волна из источников движется одновременно.
3. Волна распространяется в ячейки с минимальным весом (вес определяется таким же способом, что и в обычном волновом алгоритме).
4. После пересечения в дискрете фронта волн проводится трасса от места пересечения до контактов в порядке убывания веса.

В качестве примера практического использования алгоритма в задачах трассировки на рисунке 5.29 показано проведение трассы методом встречной волны. Критерием качества полученной трассы служит минимум длины трассы при единичной длине шага.

Как видно из рисунка 5.29, пересечение фронтов волн произошло на шестом шаге в дискрете (5; 5).

Главным достоинством рассмотренного алгоритма является то, что он позволяет без снижения точности зна-



**Рис. 5.29**  
Трассировка  
методом  
встречной  
волны

чительно сократить число шагов и, следовательно, повысить быстродействие при расчетах на ЭВМ по сравнению с обычным волновым алгоритмом.

### 5.3.6. Волновой алгоритм соединения комплексов

Для получения трассы, связывающей несколько контактных площадок на печатной плате, удобно использовать модифицированный волновой алгоритм, отличительной особенностью которого является возможность соединения между собой комплексов отдельных печатных проводников. Такие задачи наиболее часто встречаются на практике, поскольку в реальных печатных платах элементы печатного рисунка имеют сложную конфигурацию и обеспечивают электрическую связь между множеством контактных площадок. Развитие идей и положений базового волнового алгоритма привело к появлению его особой модификации, позволяющей успешно решать задачи трассировки комплексов. Алгоритм состоит из следующих основных этапов:

1. Выбирается источник волны (обычно один из контактов) и от него волна распространяется обычным способом.

2. При достижении волной первого из контактов проводится трасса.

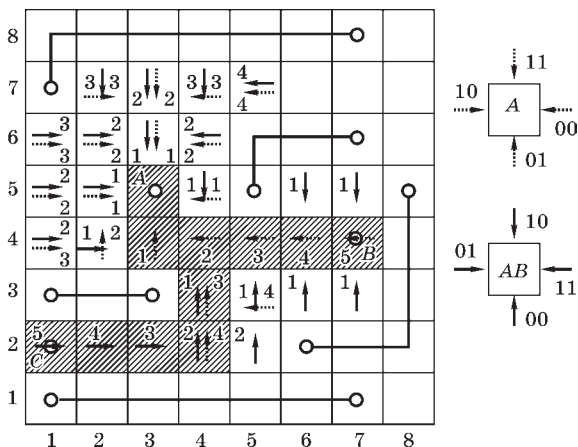


Рис. 5.30  
Трассировка комплексов

3. Далее в качестве источника волны рассматривается проведенная трасса, изменяется приоритетный порядок и волна распространяется до следующего контакта и т. д.

На рисунке 5.30 дан пример проведения трассы минимальной длины между контактами  $A$ ,  $B$  и  $C$  при единичной длине шага. Здесь первоначальным источником волны служит контакт  $A$ . После достижения контакта  $B$  проводится трасса. Затем источником волны является полученная трасса  $AB$ .

Следует заметить, что в некоторых случаях в качестве источника волны на первом этапе алгоритма можно рассматривать и участки ранее полученных трасс (аналогично третьему этапу алгоритма).

### **5.3.7. Алгоритм минимального отклонения от соединительной линии**

Главная идея данного алгоритма состоит в том, что трасса не должна сильно отклоняться от воображаемой линии, соединяющей по кратчайшему пути две контактные площадки. В сущности, алгоритм близок к принципам ручной трассировки. Его основу составляет упрощенный вариант волнового алгоритма и базируется на следующих основных положениях.

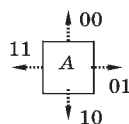
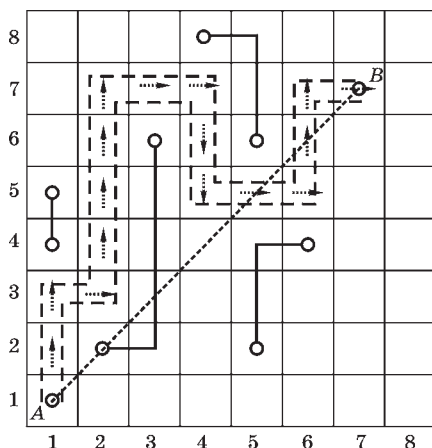
1. Проводится кратчайшая линия между соединяемыми контактами.
2. Задаются приоритеты распространения волны от источника к приемнику.
3. Пошагово осуществляется движение в соседние дискреты с обходом волной препятствий в соответствии с выбранными приоритетами.
4. Движение должно осуществляться с минимальным отклонением от соединительной линии.

На рисунке 5.31 представлен пример проведения трассы между двумя контактами при минимальном отклонении от соединительной линии  $AB$ .

Необходимо заметить, что рассмотренный эвристический алгоритм отличается простотой, легкостью в реализации на ЭВМ и позволяет проводить разводку



**Рис. 5.31**  
Трассировка  
с минималь-  
ным откло-  
нением от  
линии  $AB$



печатных плат низкого класса точности при отсутствии жестких ограничений на длину печатного проводника, число поворотов трассы и т. п. Основным недостатком алгоритма является невозможность гарантированного проведения всех трасс оптимально возможной конфигурации.

### 5.3.8. Алгоритм обхода занятых дискрет

По своей сути представляет собой модификацию предыдущего алгоритма. Главным отличием является отсутствие приоритетов движения луча. Рассмотрим его основные этапы.

1. Все ранее проведенные трассы обводятся прямоугольниками минимальной площади.

2. Проводится линия кратчайшего соединения между контактами цепи.

3. Осуществляется пошаговое движение с минимальным отклонением от соединительной линии, а препятствия (прямоугольники) обходятся по кратчайшему пути.

В качестве примера на рисунке 5.32 представлен фрагмент трассировки платы данным алгоритмом, в соответствии с которым обход прямоугольника  $adeb$  осуществлен по маршруту  $ab$  как наиболее короткому.

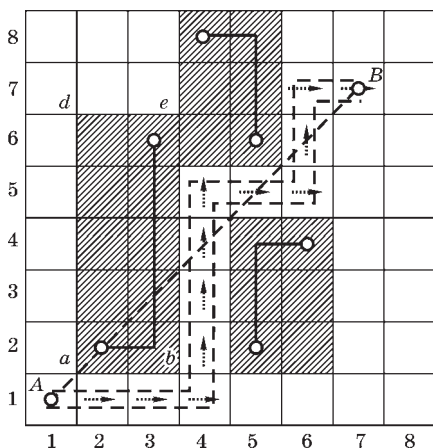


Рис. 5.32  
Трассировка с обходом  
занятых дискрет

Рассмотренный алгоритм обладает более высокой точностью, чем предыдущий благодаря введению дополнительного ограничения на кратчайший обход ранее проведенных трасс по прямоугольникам.

### 5.3.9. Лучевой алгоритм

Лучевой алгоритм представляет собой упрощенную модификацию волнового алгоритма. Отличие состоит в том, что моделируется распространение лучей от обоих конечных элементов трассы. Моделирование заканчивается, когда на некотором элементе трассы встречаются лучи, распространяющиеся от разных ее концов. Прокладку трассы производят по координатам, определяемым при моделировании, от дискреты, в которой встретились лучи, к конечным ячейкам трассы. Алгоритм используется для печатных плат невысоких классов точности или для трассировки значительной части соединений (до 70–80%) с последующей доводкой волновым алгоритмом или ручным способом. Достоинствами лучевого алгоритма являются простота, быстрое действие, малый объем занимаемой памяти. Основным его недостаток — не гарантируется нахождение трассы, которая в действительности существует.

Решение задачи трассировки лучевым алгоритмом сводится к серии задач проведения соединений мини-

мальной длины между парами контактов, причем пересечения соединений не допускаются. Для проведения трассы МКП делится на дискреты с учетом размеров контактов (выводов) элементов и максимальной ширины трассы. В ходе решения задачи все ячейки поля делятся на занятые (в них находятся контакты и ранее проведенные трассы) и свободные. Лучи  $L_i, i = 1, 2, \dots$  распространяются шагами по свободным дискретам, за один шаг луч переходит в соседнюю ячейку. При встрече препятствия луч обходит его в соответствии с задаваемыми приоритетами движения. Приоритеты устанавливаются с учетом взаимного расположения соединяемой пары контактов.

В качестве примера рассмотрим лучевой алгоритм, предложенный Л. Б. Абрайтисом [45]. Пусть для соединяемых контактов  $A$  и  $B$  задаются лучи, например,  $L_1^A, L_2^A, L_3^B, L_4^B$  (по два для каждого контакта). Пару лучей  $L_1^A, L_2^A$  (или  $L_3^B, L_4^B$ ) называют одноименными, лучи  $L_i^A, L_j^B$  — разноименными, причем одноименных лучей может быть более двух. Для каждого луча задаются приоритеты, например если контакт  $A$  расположен выше и левее  $B$ , то луч  $L_1^A$  может иметь приоритетное движение «вниз», а если соседний снизу дискрет занят, то движение «вправо». Такие приоритеты обозначают стрелками, направленными в сторону, противоположную движению луча (рис. 5.33).

После задания лучей и их приоритетов начинается пошаговое одновременное распространение лучей, в ходе которого отдельные лучи могут попадать в «ловушку», т. е. «блокироваться» занятыми дискретами (не могут их обойти), а оставшиеся лучи продолжают движение. Когда два разноименных луча  $L_i^A$  и  $L_j^B$  встречаются, то распространение лучей прекращается, а из дискреты встречи  $W$  проводятся два участка трассы  $WA$  и  $WB$  по ячейкам, отмеченными стрелками этих лучей. Если разноименные лучи не встретились, то решение повторяют, увеличив число лучей или изменив их приоритеты.

Рассмотрим использование лучевого алгоритма на простейшем примере. Требуется провести трассу между контактами  $A$  и  $B$  МКП печатной платы (рис. 5.33). Учи-

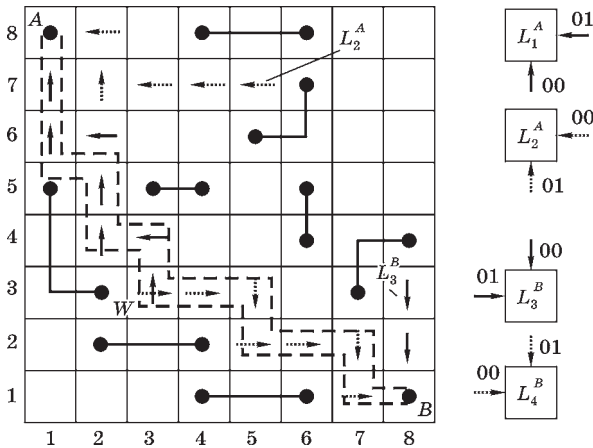


Рис. 5.33  
Моделирование распространения лучей

тывая взаимное расположение соединяемых контактов, задаются четыре луча  $L_1^A$ ,  $L_2^A$ ,  $L_3^B$ ,  $L_4^B$  с соответствующими приоритетами. Распространение лучей представлено в таблице 5.3.

Как видно из рисунка 5.33 и таблицы 5.3, луч  $L_3^B$  блокирован на третьем шаге, луч  $L_2^A$  — на шестом. Лучи  $L_1^A$  и  $L_4^B$  встретились на седьмом шаге в дискрете  $W$  с координатами (3; 3), из этого места трасса прокладывается к контактам  $A$  и  $B$ .

Таблица 5.3

Координаты распространения лучей

Шаг	Луч			
	$L_1^A$	$L_2^A$	$L_3^B$	$L_4^B$
1	(2; 8)	(1; 7)	(7; 1)	(8; 2)
2	(2; 7)	(1; 6)	(7; 2)	(8; 3)
3	(3; 7)	(2; 6)	(6; 2)	—
4	(4; 7)	(2; 5)	(5; 2)	—
5	(5; 7)	(2; 4)	(5; 3)	—
6	—	(3; 4)	(4; 3)	—
7	—	(3; 3)	(3; 3)	—

Задавая количество лучей, число и направление приоритетов движения, а также порядок распространения лучей, получают различные модификации лучевого алгоритма. Так, для повышения точности иногда используют трех- или четырехлучевые алгоритмы трассировки. Такие алгоритмы основаны на моделировании распространения лучей от каждого конечного элемента трассы в трех или даже четырех направлениях. При этом уменьшается возможность блокировки лучей и появляется большая свобода в проведении трасс. Следует заметить, что четырехлучевой алгоритм в сущности близок к обычному волновому, поэтому его целесообразно использовать тогда, когда при помощи двухлучевой модификации невозможно получить все необходимые трассы.

### **5.3.10. Волновой алгоритм трассировки многослойных печатных плат**

Задачи трассировки соединений многослойных печатных плат являются самыми распространенными и наиболее трудными, рассмотрим их на примере двусторонних печатных плат. При трассировке ДПП в качестве модели монтажного пространства рассматриваются два дискретных рабочих слоя (поля), связанных между собой переходами. Соединяемые контакты  $A$  и  $B$  находятся в соответствующих дискретах обоих слоев. Одним из основных критериев здесь является минимальное число переходов между слоями. Большинство алгоритмов трассировки ДПП представляют собой особые модификации волнового и лучевого алгоритмов. Во всех этих алгоритмах можно выделить два основных этапа. На первом этапе волна (лучи) от источника ( $A$ ) в каждом слое шагами распространяется на соседние свободные дискреты. При распространении волны выделяются дискреты для перехода из одного слоя в другой. В занятых волной дискретах указывается весовой коэффициент, характеризующий качество пути. Распространение волны продолжается до тех пор, пока в одном из слоев ее фронт не достигнет приемника ( $B$ ). На втором этапе трасса проводится в обратном направлении, т. е. из  $B$  в  $A$ . Трасса начинается в слое,

где ячейка с приемником  $B$  имеет предпочтительный вес. Если на пути трассы встречается препятствие, то путь проходит через один из выделенных дискретов в другой слой, где продолжается, пока не достигнет источника  $A$  или не встретит препятствие. Иногда проводят два варианта трассы, один с началом в первом слое, другой — во втором [3].

Рассмотрим один из алгоритмов трассировки ДПП на простейшем примере, представленного на рисунке 5.34. Здесь при распространении волны в каждой ячейке представляются два числа, первое из которых характеризует длину пути (от источника  $A$ ) и указывает на количество шагов, а второе — на число переходов из слоя в слой. Первый этап данного алгоритма (распространение волны) продемонстрирован на рисунке 5.34а.

За первый шаг волна из ячейки  $A$  с координатами  $(2; 1)$ , имеющей вес  $0; 0$ , распространяется в первом слое в дискреты  $(1; 1)$ ,  $(2; 2)$ ,  $(3; 1)$  и соответствующие дискреты во втором слое. Во всех этих дискретах представляется вес  $1; 0$ , т. е. длина пути  $1$ , число переходов между слоями  $0$ . На втором шаге в первом слое волна занимает свободные дискреты  $(1; 2)$ ,  $(3; 2)$ , а во втором слое —  $(1; 2)$ ,  $(2; 3)$ ,  $(3; 2)$ , их вес  $2; 0$ . На третьем шаге в первом слое волна приходит в ячейку  $(4; 2)$  с весом  $3; 0$  и в  $(2; 4)$  с весом  $3; 1$ , а во втором слое —  $(2; 4)$  с весом  $3; 0$  и в  $(3; 3)$  с весом  $3; 0$ . Для ячейки  $(2; 4)$  первого слоя вторая цифра увеличилась (с  $0$  до  $1$ ), так как из ячейки  $(2; 4)$  первого слоя можно попасть в источник  $A$  без увеличения длины трассы, лишь перейдя во второй слой. Данная ячейка выделяется для возможного перехода. Характерным признаком ячеек, в которых планируется переход на другой слой, является большее значение (на  $1$ ) второй цифры по сравнению с соответствующей ячейкой другого слоя. На четвертом шаге выделяется ячейка  $(5; 2)$  для перехода из второго слоя в первый, на шестом —  $(5; 4)$  (переход из первого слоя) и на восьмом — ячейка  $(5; 6)$  (переход из второго слоя). На девятом шаге волна достигает приемника  $B$ , причем в первом слое с весом  $9; 1$ , во втором —  $9; 2$ .

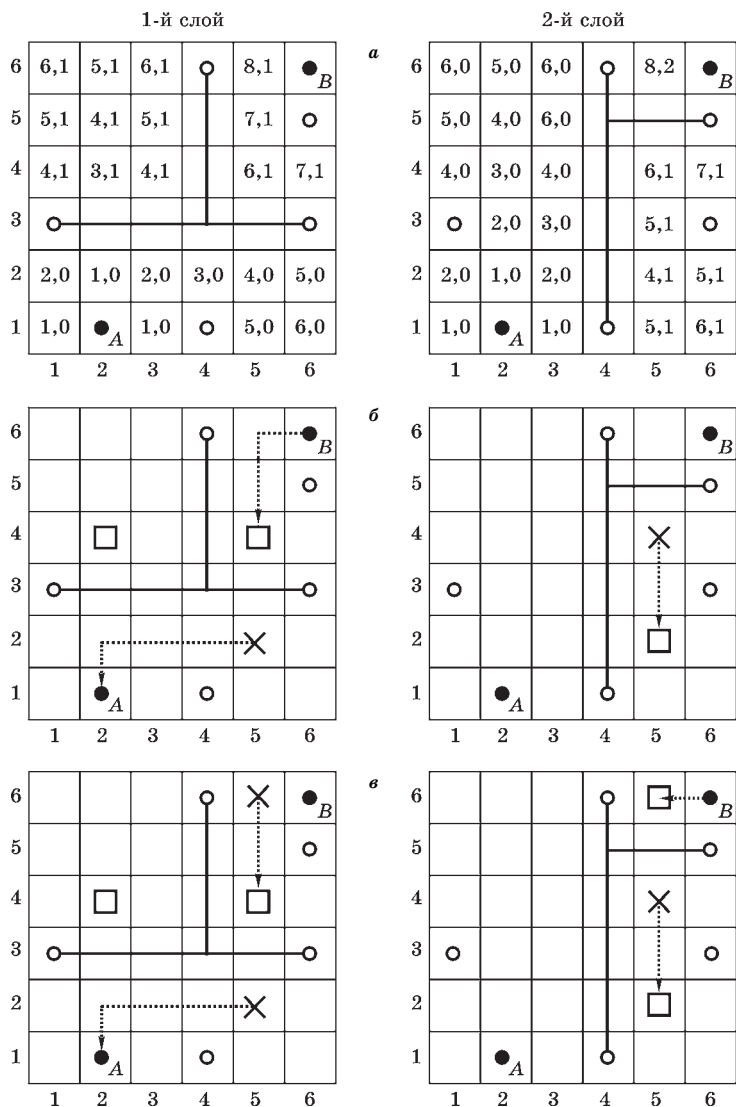


Рис. 5.34

Трассировка ДПП волновым алгоритмом:

*a* — моделирование распространения волны; *б* — проведение трассы с началом в первом слое; *в* — проведение трассы с началом во втором слое.

Следовательно, первая цифра  $l$  (длина) увеличивалась по формуле  $l_i = l_{i-1} + 1$ , а вторая цифра  $\alpha$  (число межслоевых переходов) изменялась в соответствии с отношением

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_{i-1}, & \text{переход не планируется;} \\ \alpha_{i-1} + 1, & \text{переход планируется.} \end{cases}$$

Второй этап показан на рисунке 5.34б. Проведение трассы из ячейки  $B$  начинается в первом слое, так как ее вес (по  $\alpha$ ) меньше. Трасса проходит по дискретам с убыванием  $l$ , т. е. (6; 6), (5; 6), (5; 5), (5; 4). В дискрете (5; 4) осуществляется переход во второй слой, где трасса проводится по ячейкам (5; 4), (5; 3), (5; 2). Далее переход в первый слой ячейки (5; 2), (4; 2), (2; 2), (2; 1). Если трассу начать во втором слое, то потребуются три перехода (рис. 5.34в).

При трассировке МПП широко используются различного рода модификации волнового алгоритма, отличающиеся критериями качества, способом планирования переходов и точностью.

### 5.3.11. Алгоритм Хейса

Среди эвристических алгоритмов многослойной трассировки алгоритм Хейса занимает особое место. Алгоритм является обобщением волнового и лучевого алгоритмов и позволяет осуществлять построение соединений в МКП, в качестве которого рассматривается набор плоскостей (слоев), связанных между собой с помощью межслоевых переходов. Алгоритм осуществляет поиск кратчайшего пути в многослойном дискретном МКП между двумя контактами.

Особенность алгоритма состоит в том, что волна может распространяться в одном слое только в горизонтальном направлении (горизонтальный слой), а в другом — только в вертикальном (вертикальный слой). В соответствии с этим принципом и проводятся трассы.

Порядок работы алгоритма включает несколько этапов:



- волна (луч) распространяется вправо и вверх (обозначается знаком «+»), влево и вниз (обозначается знаком «-»), если дискреты свободны;
- если в одном слое ячейка занята, а в другом свободна, то свободная ячейка выделяется для перехода;
- ячейки для перехода на очередном слое служат началом нового луча (волны).

Принцип работы алгоритма показан на рисунке 5.35. Здесь заштрихованные ячейки соответствуют запрещенным зонам (1; 4)–(6; 4) горизонтального слоя и (3; 1)–(3; 6) вертикального. Возможные ячейки для межслоевого перехода обозначены буквой «П».

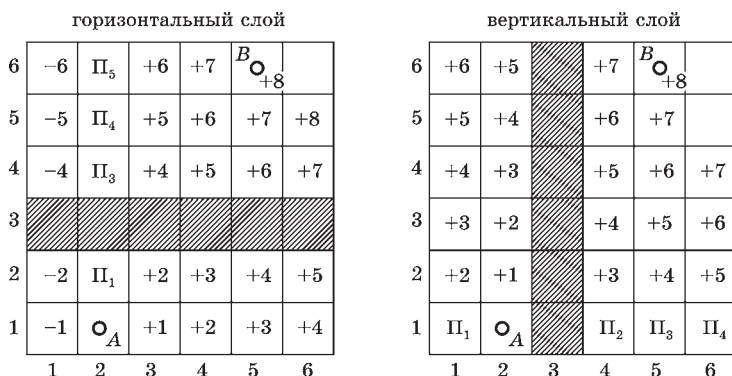


Рис. 5.35  
Распространение волны и просмотр ячеек

Трассы проводятся следующим образом: если в дискрете  $B$  знак «+», то трасса может распространяться вниз и влево, а если «-», то наоборот.

На рисунке 5.36 одновременно представлены два варианта возможного проведения трасс с первого на второй слой.

Поскольку в алгоритме Хейса волна распространяется независимо в каждом из  $n$  слоев схемы, то это приводит к значительным затратам времени и памяти при реализации алгоритма на ЭВМ. Однако достаточно высокая точность алгоритма и рост производительности современной вычислительной техники сглаживают

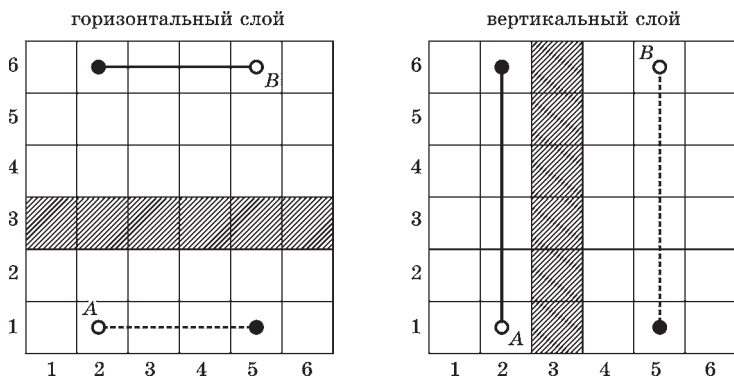


Рис. 5.36  
Результаты трассировки

отмеченный недостаток и позволяют использовать алгоритм в программном обеспечении соответствующих САПР.

### 5.3.12. Принципы канальной трассировки

При проектировании печатных плат с многоконтактными элементами (микросхемы, коммутационные устройства, электрические соединители и т. п.) часто применяется принцип размещения трасс вдоль вертикальных и горизонтальных каналов, проходящих между рядами контактов (рис. 5.37).

Ширина каждого канала определяется числом прокладываемых в них печатных проводников, т. е. классом точности печатной платы. Предполагается, что в канале

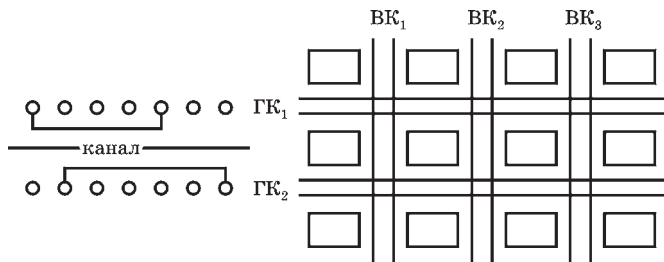


Рис. 5.37  
Размещение трасс вдоль каналов

не размещаются никакие другие объекты, кроме трасс. Каждый канал содержит несколько магистралей, на которых размещаются участки трасс. Любое электрическое соединение при канальной трассировке будет представлять совокупность объединенных в одну цепь участков магистралей. Обычно вдоль магистралей участки трассы проводятся в одном слое, а отрезки, соединяющие их с контактами, — в другом, как показано на рисунке 5.38.

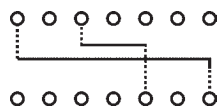


Рис. 5.38  
Послойное  
размещение  
участков трасс

Алгоритмическая реализация принципов канальной трассировки предполагает выполнение двух этапов [15].

На первом этапе осуществляется распределение соединений по каналам с учетом их оптимальной загрузки и оптимизация расположения соединений на магистралях каналов. Для заданных конструктивно-технологических ограничений каждому каналу МКП можно поставить в соответствие некоторое число, называемое пропускной способностью канала. Пропускная способность канала показывает, какое максимально допустимое число печатных проводников можно проложить в сечении канала с выполнением необходимых технологических ограничений. При этом оптимальное распределение элементов проводящего рисунка по каналам сводится к их равномерной загрузке с учетом электромагнитной и тепловой совместимости соседних печатных проводников.

Задачи первого этапа решаются с помощью алгоритмов построения кратчайших связывающих деревьев (см. § 5.3.1). При этом необходимо равномерно загружать все каналы. Канал считается заполненным, если текущая загрузка канала или количество занятых магистралей  $z$  равно пропускной способности канала  $y$ . В случае, когда  $z > y$ , лишние трассы пускаются по другим каналам.

На втором этапе выполняется оптимизация расположения соединений на магистралях каналов, т. е. минимизация числа переходных отверстий с одного слоя МКП на другой, минимизация длин полученных трасс, максимизация количества реализованных трасс.

Задачи второго этапа решаются с помощью специальных канальных алгоритмов, представляющих собой особые модификации волновых и лучевых алгоритмов. Класс канальных алгоритмов трассировки характеризуется повышенным быстродействием, меньшими требованиями к вычислительным ресурсам, однако он менее универсален, что накладывает определенные ограничения на конструктивно-технологические решения. Этот недостаток связан с тем, что в волновых, лучевых и канальных алгоритмах используется последовательный принцип трассировки, предполагающий оптимальное построение каждой отдельно взятой трассы без прогноза на прокладку последующих соединений [15]. Поэтому по мере приближения к концу решения задачи трассировки становится очевидным тот факт, что отдельные ранее проложенные трассы можно было бы построить менее оптимально, но при этом возникли бы дополнительные возможности к прокладке ряда последующих трасс. Подобного недостатка частично лишен так называемый метод «гибкой трассировки», в основу которого положены приемы неавтоматизированного проектирования. Метод характеризуется отсутствием жесткой фиксации прокладываемых трасс, которая часто создает необоснованные препятствия для еще не проложенных трасс.

Метод гибкой трассировки состоит из двух основных этапов:

- макротрассировки, на котором формируется оптимальная топологическая модель для всех трасс, обеспечивающая их плоское вложение в МКП;
- микротрассировки, где строятся геометрические модели для каждой трассы.

Таким образом, на первом этапе трассы размещаются в довольно крупные области, в пределах которых они могут изменять свою конфигурацию и местоположение, создавая тем самым оптимальные условия для прокладки других соединений, а на втором этапе происходит фиксация трасс на МКП с определением их окончательных геометрических характеристик.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие задачи автоматизированного конструкторского проектирования выделяют при разработке функционального узла на печатном монтаже?
2. Как математически формулируется задача компоновки?
3. Какие критерии качества оптимизируют в задачах компоновки?
4. Какие алгоритмы решения задачи компоновки вы знаете?
5. В чем заключаются достоинства и недостатки эвристических и точных алгоритмов решения задачи компоновки?
6. Какие основные этапы включает в себя последовательный алгоритм компоновки, основанный на использовании матрицы смежности?
7. Что характеризует с точки зрения компоновки и как рассчитывается относительный вес вершины графа?
8. На каких принципах основан последовательный алгоритм компоновки с использованием матрицы цепей?
9. Из каких основных этапов состоит последовательно-итерационный алгоритм компоновки, использующий матрицу смежности?
10. Что характеризуют перестановочные коэффициенты и каким образом производится их оценка в последовательно-итерационном алгоритме?
11. Какие принципы заложены в основу генетических алгоритмов компоновки?
12. В чем заключается сущность метода комбинирования эвристик?
13. В каких целях решаются задачи типизации и покрытия?
14. Какова математическая постановка задачи типизации?
15. Какие этапы включает в себя алгоритм Бершадского?
16. Как формулируется задача покрытия?
17. Каков принцип работы эвристического алгоритма Селютина?
18. Как математически формулируется задача размещения?

19. Какие критерии используют для оценки качества размещения?
20. Какие алгоритмы решения задачи размещения вы знаете?
21. В чем заключаются особенности применения эвристических и точных алгоритмов решения задачи размещения?
22. Из каких основных этапов состоит последовательно-итерационный алгоритм размещения?
23. С какой целью осуществляют расчет коэффициентов связности элементов?
24. Что характеризует собой предпочтительная позиция элемента в координатах условного «центра тяжести»?
25. Какая идея заложена в основу метода «длинных» и «коротких» ребер?
26. Какие основные этапы предусматривает эвристический алгоритм с использованием метода «длинных» и «коротких» ребер?
27. В чем состоит сущность алгоритма размещения однотипных элементов?
28. В чем заключается метод ветвей и границ?
29. Какова последовательность этапов алгоритма, основанного на методе ветвей и границ?
30. В чем заключается идея алгоритма случайного поиска?
31. Какие правила останова используются в алгоритме случайного поиска?
32. Какие требования к размещению графа в МКП определяют возможность распределения электрических соединений компонентов схемы на односторонней, двусторонней или многослойной печатной плате?
33. В чем заключается метод «раскраски» графа?
34. Как осуществляется определение числа слоев платы с помощью алгоритма, основанного на методе «раскраски»?
35. Как математически формулируется задача трассировки?
36. Какие критерии качества используются в задачах трассировки?
37. В чем заключаются достоинства и недостатки эвристических и точных алгоритмов решения задачи трассировки?

38. Какие основные этапы при построении минимального связывающего дерева включает в себя метод Крускала? Каковы его недостатки?
39. Чем отличается алгоритм Прима от алгоритма Вейнбергера — Лобермана?
40. Какие алгоритмы используются для определения порядка проведения трасс?
41. Какова последовательность этапов алгоритма Айкерса?
42. Какие группы алгоритмов используются для трассировки соединений, в чем их отличия, достоинства и недостатки?
43. Какие положения составляют основу волнового алгоритма трассировки?
44. Что характеризует собой и как оценивается показатель веса дискреты?
45. Чем отличается алгоритм «встречной» волны от обычного волнового алгоритма?
46. Какой алгоритм используют при необходимости проведения трассы между несколькими контактными площадками на печатной плате?
47. Каков принцип работы алгоритма минимального отклонения от соединительной линии?
48. В чем заключается сущность алгоритма обхода занятых дискрет?
49. Какие положения составляют основу лучевого алгоритма?
50. При каких условиях точность лучевого алгоритма приближается к волновому?
51. Какими отличительными особенностями обладает волновой алгоритм трассировки многослойных печатных плат по сравнению с обычным волновым алгоритмом?
52. Как выполняется индексация ячеек в волновом алгоритме трассировки многослойных печатных плат?
53. Какая идея положена в основу алгоритма Хейса?
54. На каких принципах базируется канальная трассировка?
55. Какие укрупненные этапы выполняются при алгоритмической реализации принципов канальной трассировки?

---

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**К**ачество продукции и услуг в нашей стране на протяжении многих лет традиционно было значительно ниже, чем в других развитых странах, однако в последние годы наметилась тенденция к повышению суммарного роста качества отечественной продукции и повышению ее спроса на потребительском рынке. Такая положительная динамика обеспечивается в основном благодаря конкуренции со стороны крупных мировых производителей товаров и услуг, которая стимулирует к внедрению на предприятиях современных систем управления производственными процессами новейших информационных технологий, методов контроля качества продукции, а также повышает стремление отечественных производителей выпускать продукцию, соответствующую мировым стандартам в области качества. Сложность современных ЭС и повышенные требования к их функциональным характеристикам, надежности, энергетической эффективности требуют применения средств автоматизации на всех этапах ЖЦ продукции.

Системы автоматизированного проектирования являются одним из видов наиболее сложных искусственных технических систем, их укрупненную структуру представляют различные виды обеспечения, для подробного рассмотрения каждого из которых необходимо по крайней мере, несколько отдельных специализированных учебных изданий. Такая многогранность и сложность взаимосвязанных задач наиболее хорошо заметна при рассмотрении



математического обеспечения САПР. Знание МО САПР позволяет правильно сформулировать решаемую задачу, выбрать необходимый метод ее решения и разработать модель, эффективно использовать программно-технические средства САПР. Именно поэтому МО САПР считается одним из наиболее важных видов обеспечения с точки зрения функционирования САПР. Поскольку математический аппарат САПР объединяет знания из различных областей математики, да и сами САПР классифицируются по различным сферам применения, то при написании данного пособия авторами ставилась цель в первую очередь рассмотреть такие модели, методы и алгоритмы, которые используются в САПР радиоэлектронных средств. Поэтому большее внимание в пособии уделено вопросам моделирования на макро- и системном уровне, методам решения системотехнических, схемотехнических, технологических и конструкторских задач, а некоторые проблемы, напрямую не связанные с конструированием ЭС, остались за рамками настоящего пособия. Так, модели, методы и алгоритмы машинной графики и геометрического моделирования представляют в первую очередь интерес для разработчиков самих САПР, а не для специалистов-проектировщиков ЭС. Кроме того, по этой тематике существует достаточно много источников различного уровня сложности, например [1], [6] и др., поэтому вопросы, связанные с МГ и ГМ, данное учебное пособие не охватывает.

Современные САПР обеспечивают единое информационное пространство, которое создает автоматизированное выполнение всех этапов проектно-конструкторско-технологической деятельности. Появляются интеллектуальные САПР, предусматривающие применение развитых методов работы со знаниями (их представлением, хранением, использованием и т. д.).

Большие возможности в применении САПР открывают новые направления в области моделирования. К этим направлениям прежде всего относятся: множественное моделирование, позволяющее учесть различные состояния функционирования при эксплуатации изделий; ког-

нитивное моделирование, повышающее актуализацию знаний и облегчающее решение интеллектуальных задач; мягкое моделирование, учитывающее размытость (нечеткость) исходных данных; автоматизация моделирования и др.

Развитие методов решения задач конструкторского проектирования привело к созданию алгоритмов, которые реализованы в программном обеспечении различных современных систем сквозного проектирования печатных плат, таких как Altium Designer, OrCAD, NI Ultiboard, Proteus, BoardMaker и других программных продуктов отечественных и зарубежных фирм-производителей ПС.

Все бóльшую роль в расширении возможностей САПР приобретает использование достижений в области телекоммуникаций. Глобальные системы связи дают возможность сотрудникам, находящимся вне рабочего места, получать необходимую информацию (звуковую, текстовую, графическую), оперативно принимать управленческие и проектные решения по возникающим вопросам. Современные системы радиосвязи с подвижными объектами обеспечивают надежность и конфиденциальность связи, защиту от несанкционированного доступа в систему. Все это позволяет повысить производительность труда, обеспечить автоматизированный контроль выполняемых работ и технологических процессов, добиваться экономии материально-трудовых ресурсов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Норенков, И. П.* Основы автоматизированного проектирования : учебник для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 336 с.
2. *Гуткин, Л. С.* Проектирование радиосистем и радиоустройств : учеб. пособие. — М. : Радио и связь, 1986. — 288 с.
3. Информационные технологии проектирования радиоэлектронных средств : учеб. пособие / Ю. Л. Муромцев, Д. Ю. Муромцев, И. В. Тюрин [и др.]. — М. : Издат. центр «Академия», 2010. — 384 с.
4. *Петров, А. В.* Анализ и синтез радиотехнических комплексов / А. В. Петров, А. А. Яковлев ; под ред. В. Е. Дулевича. — М. : Радио и связь, 1984. — 248 с.
5. Основы систем автоматизированного проектирования / М. М. Берхеев, И. А. Заляев, Ю. В. Кожевников [и др.] ; под общ. ред. Ю. В. Кожевникова. — Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1988. — 353 с.
6. Автоматизация проектирования радиоэлектронных средств : учеб. пособие / О. В. Алексеев, А. А. Головков, И. Ю. Пивоваров [и др.] ; под ред. О. В. Алексеева. — М. : Высш. шк., 2000. — 479 с.
7. *Малин, А. С.* Исследование систем управления : учебник для вузов / А. С. Малин, В. И. Мухин. — 2-е изд. — М. : Изд-во ГУ ВШЭ, 2004 — 400 с.
8. Управление качеством. Робастное проектирование. Метод Тагути : пер. с англ. / Р. Леон, А. Шумейкер, Г. Тагути [и др.]. — М. : СЕЙ-ФИ, 2002. — 384 с.
9. *Верхопятницкий, П. Д.* Справочник по модульному конструированию радиоэлектронной аппаратуры / П. Д. Верхопятницкий, В. С. Латинский. — Л. : Судостроение, 1983. — 232 с.
10. *Бурбаки, Н.* Основные структуры анализа : Теория множеств : пер. с фр. / Н. Бурбаки; под ред. В. А. Успенского. — М. : Мир, 1963. Кн. 1. Часть 1. — 457 с.
11. *Лавров, И. А.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. — 5-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — 256 с.

12. *Пухальский, Г. И.* Цифровые устройства : учеб. пособие для вузов / Г. И. Пухальский, Т. Я. Новосельцева. — СПб. : Политехника, 1996. — 885 с.
13. *Харари, Ф.* Теория графов / пер. с англ. и предисл. В. П. Козырева ; под ред. Г. П. Гаврилова. — 2-е изд. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 296 с.
14. *Сигорский, В. П.* Матрицы и графы в электронике. — М. : Энергия, 1968. — 176 с.
15. *Курейчик, В. М.* Математическое обеспечение конструкторского и технологического проектирования с применением САПР : учебник для вузов. — М. : Радио и связь, 1990. — 352 с.
16. *Норенков, И. П.* Информационная поддержка наукоемких изделий. CALS-технологии / И. П. Норенков, П. К. Кузьмин. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 320 с.
17. *Томаси, У.* Электронные системы связи : пер. с англ. — М. : Техносфера, 2007. — 1360 с.
18. *Картер, Б.* Операционные усилители для всех : пер. с англ. / Б. Картер, Р. Манчини. — М. : Додэка-XXI, 2011. — 544 с.
19. *Пухальский, Г. И.* Логическое проектирование цифровых устройств радиотехнических систем. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1976. — 231 с.
20. *Бауэр, В.* Введение в теорию конечных автоматов : пер. с нем. / под ред. Ю. И. Журавлева. — М. : Радио и связь, 1987. — 392 с.
21. *Пухальский, Г. И.* Проектирование цифровых устройств : учеб. пособие / Г. И. Пухальский, Т. Я. Новосельцева. — СПб. : Лань, 2012. — 896 с.
22. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ / В. В. Никольский, В. П. Орлов, В. Г. Феоктистов [и др.] ; под ред. В. В. Никольского. — М. : Радио и связь, 1982. — 272 с.
23. Автоматизированное проектирование антенн и устройств СВЧ : учеб. пособие для вузов / Д. И. Воскресенский, С. Д. Кременецкий, А. Ю. Гринев [и др.]. — М. : Радио и связь, 1988. — 240 с.
24. *Советов, Б. Я.* Моделирование систем : учебник для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — М. : Высш. шк., 2005. — 343 с.
25. *Шальто, А. А.* SWITCH-технологии. Алгоритмизация и программирование задач логического управления. — СПб. : Наука, 1998. — 628 с.
26. Информационные технологии управления : учеб. пособие для вузов / под ред. Г. А. Титоренко. — 2-е изд., доп. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 439 с.
27. *Таха, Х. А.* Введение в исследование операций. — М. : Издат. дом «Вильямс», 2001. — 912 с.
28. *Люггер, Дж.* Искусственный интеллект. Стратегии и методы решения сложных проблем. — М. : Издат. дом «Вильямс», 2005. — 864 с.
29. *Романов, В. П.* Интеллектуальные информационные системы в экономике: учеб. пособие / под ред. Н. П. Тихомирова. — М. : Экзамен, 2007. — 496 с.
30. *Леоненков, А. В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 736 с.

31. Экономическая эффективность и конкурентоспособность : учеб. пособие / Д. Ю. Муромцев, Ю. Л. Муромцев, В. М. Тютюнник [и др.]. — 2-е изд., стер. — Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. — 96 с.
32. Концептуальное моделирование в задачах экономической эффективности, конкурентоспособности и устойчивого развития : моногр. / Ю. Л. Муромцев, Д. Ю. Муромцев, В. А. Погонин [и др.]. — Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. — 176 с.
33. Применение SCADA-систем при автоматизации технологических процессов : учеб. пособие / В. Г. Матвейкин, С. В. Фролов, М. Б. Шехтман. — М. : Машиностроение, 2000. — 176 с.
34. Теоретические основы САПР : учебник для вузов / В. П. Корячко, В. М. Курейчик, И. П. Норенков. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 400 с.
35. *Половинкин, А. И.* Основы инженерного творчества : учеб. пособие для вузов. — М. : Машиностроение, 1988. — 368 с.
36. Технология радиоэлектронных устройств и автоматизация производства: учеб. для вузов / А. П. Достанко, В. П. Ланин, А. А. Хмыль [и др.] ; под ред. А. П. Достанко. — Минск : Вышэйш. шк., 2002. — 416 с.
37. Управление качеством электронных средств : учебник для вузов / О. П. Глудкин, А. И. Гуров, А. И. Коробов [и др.]. — М. : Высш. шк., 1994. — 412 с.
38. Системы технического зрения (принципиальные основы, аппаратное и математическое обеспечение) / А. Н. Писаревский, А. Ф. Чернявский, Г. К. Афанасьев [и др.] ; под ред. А. Н. Писаревского, А. Ф. Чернявского. — Л. : Машиностроение, 1988. — 424 с.
39. Системы технологического обеспечения качества компонентов микроэлектронной аппаратуры / В. Е. Власов, В. П. Захаров, А. И. Коробов ; под ред. А. И. Коробова. — М. : Радио и связь, 1987. — 160 с.
40. *Беннетт, Р. Дж.* Проектирование тестопригодных логических схем. — М. : Радио и связь, 1990. — 177 с.
41. *Бершадский, А. М.* Применение графов и гиперграфов для автоматизации конструкторского проектирования РЭА и ЭВА. — Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1983. — 120 с.
42. *Селютин, В. А.* Машинное конструирование электронных устройств. — М. : Сов. радио, 1977. — 384 с.
43. *Савельев, А. Я.* Конструирование ЭВМ и систем : учебник для вузов / А. Я. Савельев, В. А. Овчинников. — М. : Высш. шк., 1984. — 248 с.
44. Алгоритмические методы конструкторского проектирования узлов с печатным монтажом / Г. А. Петухов, Г. Г. Смолич, Б. И. Юлин. — М. : Радио и связь, 1987. — 152 с.
45. Автоматизация проектирования ЭВМ: автоматизированное техническое проектирование конструктивных узлов цифровых устройств / Л. Б. Абрайтис, Р. И. Шейнаускас, В. А. Жилевичус ; под ред. Л. Б. Абрайтиса. — М. : Сов. радио, 1978. — 272 с.

---

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Список сокращений</b> . . . . .	<b>3</b>
------------------------------------	----------

<b>Введение</b> . . . . .	<b>6</b>
---------------------------	----------

## *Глава 1*

### **Общие сведения об автоматизированном проектировании электронных средств**

1.1. Понятие проектирования . . . . .	10
1.2. Цели автоматизированного проектирования ЭС . . . . .	12
1.3. Принципы автоматизации проектирования ЭС . . . . .	15
1.4. Классификация САПР . . . . .	29
1.5. Виды обеспечения САПР . . . . .	39

## *Глава 2*

### **Основы математического аппарата САПР электронных средств**

2.1. Общие сведения о математическом обеспечении САПР . . . . .	45
2.2. Основные понятия теории множеств . . . . .	51
2.3. Основы алгебры логики . . . . .	56
2.4. Графы. Основные понятия и свойства . . . . .	61

## *Глава 3*

### **Математическое моделирование в задачах проектирования электронных средств**

3.1. Математическое моделирование объектов ЭС . . . . .	71
3.2. Моделирование на микроуровне . . . . .	81
3.3. Моделирование на макроуровне . . . . .	85
3.3.1. Графовые модели . . . . .	93
3.3.2. Модели электрических сигналов . . . . .	101
3.3.3. Модели аналоговых устройств . . . . .	110
3.3.4. Модели цифровых устройств . . . . .	125
3.3.5. Модели электродинамических объектов . . . . .	138
3.4. Моделирование на системном уровне . . . . .	145
3.4.1. Модели систем массового обслуживания . . . . .	150
3.4.2. Модели надежности . . . . .	170
3.4.3. Модели динамических дискретных систем . . . . .	201

## Глава 4

### Методы решения задач автоматизированного проектирования электронных средств

4.1. Обзор задач автоматизированного проектирования ЭС и методов их решения . . . . .	212
4.2. Задачи системотехнического проектирования . . . . .	214
4.2.1. Методы принятия решений в условиях полной неопределенности . . . . .	222
4.2.2. Методы принятия решений в условиях частичной неопределенности . . . . .	237
4.2.3. Методы, основанные на байесовском подходе . . . . .	249
4.2.4. Метод Шортлифа — Бьюкенена . . . . .	260
4.2.5. Метод Демпстера — Шафера . . . . .	269
4.2.6. Методы нечеткой логики . . . . .	273
4.2.7. Методы управления проектами . . . . .	281
4.2.8. Метод динамической альтернативности . . . . .	286
4.3. Задачи схемотехнического проектирования . . . . .	298
4.3.1. Методы решения задач структурного синтеза . . . . .	302
4.3.2. Метод анализа структурных схем . . . . .	306
4.3.3. Методы решения задач параметрического синтеза . . . . .	310
4.3.4. Методы обработки результатов статистического эксперимента . . . . .	315
4.3.5. Методы анализа сигналов . . . . .	327
4.4. Задачи технологического проектирования . . . . .	333
4.4.1. Методы анализа качества технологических процессов . . . . .	336
4.4.2. Методы и алгоритмы контроля качества технологических процессов . . . . .	343
4.5. Задачи конструкторского проектирования . . . . .	361

## Глава 5

### Методы и алгоритмы решения задач конструкторского проектирования

5.1. Задачи компоновки . . . . .	368
5.1.1. Последовательный алгоритм, использующий матрицу смежности . . . . .	370
5.1.2. Последовательный алгоритм, использующий матрицу цепей . . . . .	373
5.1.3. Последовательно-итерационный алгоритм . . . . .	377
5.1.4. Генетические алгоритмы . . . . .	383
5.1.5. Алгоритмы решения задач типизации и покрытия . . . . .	390
5.2. Задачи размещения . . . . .	398
5.2.1. Последовательно-итерационный алгоритм размещения . . . . .	400
5.2.2. Эвристический алгоритм, основанный на методе выделения «длинных» и «коротких» ребер . . . . .	408

5.2.3. Последовательный алгоритм размещения однотипных элементов . . . . .	412
5.2.4. Алгоритм, основанный на методе ветвей и границ . . . . .	415
5.2.5. Алгоритм случайного поиска . . . . .	420
5.2.6. Алгоритмы размещения соединений по слоям платы . . . . .	422
5.3. Задачи трассировки . . . . .	425
5.3.1. Алгоритмы формирования списка электрических соединений . . . . .	426
5.3.2. Алгоритмы определения порядка проведения соединений . . . . .	430
5.3.3. Общие сведения о алгоритмах трассировки печатных плат . . . . .	431
5.3.4. Волновой алгоритм . . . . .	432
5.3.5. Алгоритм встречной волны . . . . .	437
5.3.6. Волновой алгоритм соединения комплексов . . . . .	439
5.3.7. Алгоритм минимального отклонения от соединительной линии . . . . .	440
5.3.8. Алгоритм обхода занятых дискрет . . . . .	441
5.3.9. Лучевой алгоритм . . . . .	442
5.3.10. Волновой алгоритм трассировки многослойных печатных плат . . . . .	445
5.3.11. Алгоритм Хейса . . . . .	448
5.3.12. Принципы канальной трассировки . . . . .	450
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>456</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>459</b>

#### ГДЕ КУПИТЬ

##### ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

##### по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13  
 тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93  
 e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967  
[www.lanpbl.spb.ru/price.htm](http://www.lanpbl.spb.ru/price.htm)

##### в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19  
 тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

##### в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1  
 тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

##### ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

##### интернет-магазины:

Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>  
 «Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>  
 «Библион»: <http://www.biblion.ru>